

УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ
ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

С. В. Близнюк

*Владимиру Михайловичу Тихомирову
к его 70-летию с благодарностью от
ученика*

Решается задача восстановления в некоторой фиксированной точке единичного круга значения гармонической в круге функции, не превосходящей на этом круге по модулю единицы, по $2n + 1$ коэффициенту Фурье граничного значения функции. Также вычисляется точность оптимального восстановления и предьявляется оптимальный метод восстановления для $n = 1, 2, 3, 4$, а также метод расчета для любого n .

Постановка задачи. Пусть X, Y — нормированные пространства, $C \subset X$ — некоторый класс элементов, F — непрерывное отображение из X в Y , x^* — непрерывный функционал на X . (x^*, C, F) -задачей восстановления называется проблема восстановления значения $\langle x^*, x \rangle$ линейного функционала x^* на элементе x , про который известно, что $x \in C$, а также известен вектор $F(x)$, который называется *информационным оператором*. Любая функция $m : F(C) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *методом восстановления*. Требуется найти величину *точности оптимального восстановления*

$$E(x^*, C, F) = \inf_m \sup_{x \in C} |\langle x^*, x \rangle - m(F(x))|$$

и *оптимальный метод восстановления* \hat{m} такой, что

$$\sup_{x \in C} |\langle x^*, x \rangle - \hat{m}(F(x))| = E(x^*, C, F).$$

$C(x^*, C, F)$ -задачей оптимального восстановления связана следующая экстремальная задача:

$$\langle x^*, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in C \cap \ker F$$

называемая *ассоциированной задачей*. Подробнее о задачах восстановления см. [1].

Формализация задачи. Обозначим через $\Gamma_\infty(D)$ класс функций двух переменных $(\rho, \varphi) \rightarrow u(\rho, \varphi)$, $0 \leq \rho \leq 1$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, гармонических внутри единичного круга и ограниченных внутри круга единицей. Наша цель — исследовать $(u(r, 0), \Gamma_\infty(D), \text{Four}_n)$, $0 \leq r < 1$, где Four_n — информационный оператор, сопоставляющий функции $u(\cdot, \cdot)$ коэффициенты Фурье $(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ функции $x(\cdot) = u(r, \cdot)$, являющейся ограничением на окружность $\rho = r$ функции $u(\cdot, \cdot)$.

Функции из $\Gamma_\infty(D)$ представимы в следующем виде:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(t - \varphi) + \rho^2} f(t) dt, \quad (1)$$

где $f(t)$ — «граничное значение» функции, т. е. функция $u(\rho, t) \rightarrow f(t)$ для почти всех $t \in [-\pi, \pi]$, удовлетворяющая неравенству $\|f(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi, \pi])} \leq 1$. Подробнее о представимости гармонических функций в таком виде см. [2].

Таким образом, требуется восстановить $u(r, 0)$ функции $(\rho, \varphi) \rightarrow u(\rho, \varphi)$, представимой в виде (1), по числам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(1, \varphi) d\varphi, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(1, \varphi) \cos k\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi$$

и

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(1, \varphi) \sin k\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ассоциированная экстремальная задача здесь имеет вид:

$$u(r, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} dt \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = 0, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3)$$

где $|f(t)| \leq 1$ почти всюду.

Функция $P_r(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}$ называется *ядром Пуассона*.

Принцип Лагранжа. Задача (2) является задачей выпуклого программирования, у которой функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} L &= L(f(\cdot), \lambda_0, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lambda_0 \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} + \mu_0 + \sum_{k=1}^n (\mu_k \cos kt + \nu_k \sin kt) \right) f(t) dt. \end{aligned}$$

Задача (2) является задачей на максимум, поэтому коэффициент $\lambda_0 \leq 0$. Также можно легко показать, что $\lambda_0 \neq 0$ и мы можем считать, что $\lambda_0 = -1$. Таким образом, функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L &= L(f(\cdot), -1, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} + \mu_0 + \sum_{k=1}^n (\mu_k \cos kt + \nu_k \sin kt) \right) f(t) dt. \end{aligned}$$

Согласно принципу Лагранжа (см. [1]), если $\hat{f}(\cdot)$ — решение задачи (2), то существуют такие множители Лагранжа $\mu_0, \mu_k, \nu_k, k = 1, \dots, n$, не равные нулю одновременно, что функция L в точке $\hat{f}(\cdot)$ достигает своего минимума на множестве $BL_\infty([-\pi, \pi])$, где $BL_\infty([-\pi, \pi])$ — единичный шар в $L_\infty([-\pi, \pi])$. Из ограничений (3) следует, что $\hat{f}(\cdot) \in T_n^\perp$, где T_n — пространство тригонометрических полиномов степени n . Отсюда следует, согласно критерию наилучшего приближения в L_p (см. [1]), что

$$\mu_0 + \sum_{k=1}^n (\mu_k \cos kt + \nu_k \sin kt)$$

является полиномом наилучшего приближения функции $P_r(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}$ подпространством T_n тригонометрических полиномов степени n в метрике $L_1([-\pi, \pi])$.

Таким образом, для решения нашей задачи нам нужно найти тригонометрический полином наилучшего приближения функции $P_r(t)$ в метрике $L_1([-\pi, \pi])$ и тогда

$$E(u(r, 0), \Gamma_\infty(D), \text{Four}_n) = d(P_r(\cdot), T_n, L_1([-\pi, \pi])),$$

где $E(u(r, 0), \Gamma_\infty(D), \text{Four}_n)$ — погрешность восстановления функции $u(r, \cdot)$ по $2n + 1$ коэффициенту Фурье граничной функции, а $d(P_r(\cdot), T_n, L_1([-\pi, \pi]))$ — расстояние от функции $P_r(\cdot)$ до пространства тригонометрических полиномов степени n в метрике $L_1([-\pi, \pi])$ ¹.

Нахождение полинома наилучшего приближения. Так как функция $P_r(t)$ четная относительно t , полином наилучшего приближения должен быть четным, а, следовательно, мы можем считать, что все коэффициенты при синусах в полиноме наилучшего приближения этой функции равны нулю, т. е. $\nu_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. Значит полином наилучшего приближения функции

$$P_r(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}$$

имеет вид

$$T_{nr}(t) = \sum_{k=0}^n \mu_k \cos kt,$$

где $\mu_k = \mu_{knr}$, т. е. μ_k еще зависит от n и r .

Рассмотрим выражение вида

$$\Delta(t) = P_r(t) - T_{nr}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} - \sum_{k=0}^n \mu_k \cos kt \quad (4)$$

и докажем, что $\Delta(t)$ может равняться нулю не более чем в $n + 1$ точке отрезка $[0, \pi]$. Используя представление

$$\cos kt = \sum_{j=1}^k \alpha_j \cos^j t$$

и выражение (4), получаем представление $\Delta(t)$ в виде

$$\Delta(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} - \sum_{k=0}^n \beta_k \cos^k t.$$

Производя замену $z = \cos t$, приходим к равенству

$$\Delta(\arccos z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2rz + r^2} - \sum_{k=0}^n \beta_k z^k.$$

Продифференцировав $n + 1$ раз по z , получаем

$$\left(\frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2rz + r^2} - \sum_{k=0}^n \beta_k z^k \right)^{(n+1)} = \frac{(-2r)^{n+1} (1-r^2)}{2\pi (1-2rz + r^2)^{n+2}},$$

¹О связях между этими двумя задачами см. в [4].

Определитель этой матрицы не равен нулю, для каждого фиксированного $r \in (0, 1)$ и $n \geq 1$ все элементы матрицы A_n и элементы столбца b_r определены, поэтому решением системы уравнений (7) является

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) = A_n^{-1} b_r. \quad (9)$$

Тем самым мы показали как рассчитать все $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$, которые являются коэффициентами тригонометрического полинома наилучшего приближения $T_{nr}(t) = \sum_{k=0}^n \mu_k \cos kt$ для функции $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}$. Этот способ мы использовали для расчета численных значений коэффициентов μ_k для определенных n и r .

Оптимальный метод восстановления. Задачу (2) можно рассматривать как ассоциированную с задачей оптимального восстановления функционала

$$f(\cdot) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt$$

на множестве $f(\cdot) \in BL_1([-\pi, \pi])$ по информации

$$f(\cdot) \rightarrow \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, 1 \leq k \leq n \right).$$

Из теоремы о двойственности для задач восстановления (см. [1]) вытекает, что оптимальный метод для задачи (1) имеет вид

$$u(r, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt \approx \sum_{k=0}^n \mu_k a_k, \quad (10)$$

и точность оптимального восстановления равна

$$E_{nr} = E\left(u(r, 0), \Gamma_{\infty}(D), \text{Four}_n\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} - T_{nr} \right| dt.$$

Расчет оптимального метода и погрешности оптимального восстановления.

Все расчеты оптимального метода и погрешности оптимального восстановления производились с помощью математического программного обеспечения Mathematica 4.0, где мы применяли метод (9), описанный выше. Далее приведены расчеты для $n = 1, 2, 3, 4$ при $r = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

Случай $n = 1$. При $n = 1$ мы интерполируем в точках $t_1 = (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$, вектор

$$b_1 = \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-\sqrt{2r+r^2}}, \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1+\sqrt{2r+r^2}} \right), \text{ а матрица } A_1 \text{ имеет вид}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда используя формулу (8), получаем, что $\mu = (\mu_{01r}, \mu_{11r}) = A_1^{-1} b_1$. Для $r = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ получаем соответственно, что

$$\begin{aligned} E_{1\frac{1}{4}} &= 0.07947409722, & \mu_{01\frac{1}{4}} &= 0.1579163832, & \mu_{11\frac{1}{4}} &= 0.07431359201; \\ E_{1\frac{1}{2}} &= 0.3119165215, & \mu_{01\frac{1}{2}} &= 0.1404308321, & \mu_{11\frac{1}{2}} &= 0.1123446656; \\ E_{1\frac{3}{4}} &= 0.6523945232, & \mu_{01\frac{3}{4}} &= 0.08264722565, & \mu_{11\frac{3}{4}} &= 0.07934133662. \end{aligned}$$

¹Явная формула $d(P_r(\cdot), T_n, L_1([-\pi, \pi])) = \frac{4}{\pi} \arctg r^{n+1}$ была найдена М. Г. Крейнном (см. [5]). Наши вычисления E_{nr} совпадают с величиной $\frac{4}{\pi} \arctg r^{n+1}$ с точностью до 10^{-9} .

Случай $n = 2$. При $n = 2$ мы интерполируем в точках $t_2 = (\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$, вектор

$$b_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-\sqrt{3}r+r^2}, \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1+r^2}, \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1+\sqrt{3}r+r^2} \right),$$

а матрица A_2 имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{(3)}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{(3)}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда, аналогично, для $r = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ получаем соответственно, что

$$\begin{aligned} E_{2\frac{1}{4}} &= 0.01989274912, \mu_{02\frac{1}{4}} = 0.1590772497, \mu_{12\frac{1}{4}} = 0.07924727455, \mu_{22\frac{1}{4}} = 0.05876490209; \\ E_{2\frac{1}{2}} &= 0.1583336966, \mu_{02\frac{1}{2}} = 0.1542578679, \mu_{12\frac{1}{2}} = 0.1469122552, \mu_{22\frac{1}{2}} = 0.3692307696; \\ E_{2\frac{3}{4}} &= 0.5083036709, \mu_{02\frac{3}{4}} = 0.1110621127, \mu_{12\frac{3}{4}} = 0.1385390181, \mu_{22\frac{3}{4}} = 0.06649872866. \end{aligned}$$

Случай $n = 3$. При $n = 3$ мы интерполируем в точках $t_3 = (\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi)$, вектор

$$b_3 = \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos \frac{1}{8}\pi + r^2}, \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos \frac{3}{8}\pi + r^2}, \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1+2r \cos \frac{3}{8}\pi + r^2}, \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1+2r \cos \frac{1}{8}\pi + r^2} \right),$$

а матрица A_3 имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cos \frac{1}{8}\pi & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{3}{8}\pi \\ 1 & \cos \frac{3}{8}\pi & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\cos \frac{1}{8}\pi \\ 1 & -\cos \frac{3}{8}\pi & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{1}{8}\pi \\ 1 & -\cos \frac{1}{8}\pi & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\cos \frac{3}{8}\pi \end{pmatrix}.$$

Тогда, аналогично, для $r = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ получаем соответственно, что

$$\begin{aligned} E_{3\frac{1}{4}} &= 0.004973566675, \mu_{03\frac{1}{4}} = 0.1591500860, \mu_{13\frac{1}{4}} = 0.07955682940, \\ &\mu_{23\frac{1}{4}} = 0.01981635313, \mu_{33\frac{1}{4}} = 0.004662671321; \\ E_{3\frac{1}{2}} &= 0.07947409722, \mu_{03\frac{1}{2}} = 0.1579163832, \mu_{13\frac{1}{2}} = 0.1560585433, \\ &\mu_{23\frac{1}{2}} = 0.07431359205, \mu_{33\frac{1}{2}} = 0.02972543681; \\ E_{3\frac{3}{4}} &= 0.3901710410, \mu_{03\frac{3}{4}} = 0.1301879796, \mu_{13\frac{3}{4}} = 0.1783845740, \\ &\mu_{23\frac{3}{4}} = 0.1112585701, \mu_{33\frac{3}{4}} = 0.05340411362. \end{aligned}$$

Случай $n = 4$. При $n = 4$ мы можем аналогично вычислить точки интерполяции t_4 , вектор b_4 , а также матрицу A_4 , но в данной статье мы приведем только вычисленные μ_{k4r} для $r = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} E_{4\frac{1}{4}} &= 0.001243397598, \mu_{04\frac{1}{4}} = 0.1591546395, \mu_{14\frac{1}{4}} = 0.0795761813, \\ &\mu_{24\frac{1}{4}} = 0.01988949187, \mu_{34\frac{1}{4}} = 0.004954159145, \mu_{44\frac{1}{4}} = 0.001165684519; \\ E_{4\frac{1}{2}} &= 0.03977579129, \mu_{04\frac{1}{2}} = 0.1588443968, \mu_{14\frac{1}{2}} = 0.1583785776, \\ &\mu_{24\frac{1}{2}} = 0.07825765008, \mu_{34\frac{1}{2}} = 0.03726554766, \mu_{44\frac{1}{2}} = 0.01490621911; \\ E_{4\frac{3}{4}} &= 0.2966583314, \mu_{04\frac{3}{4}} = 0.1421854074, \mu_{14\frac{3}{4}} = 0.2033792176, \\ &\mu_{24\frac{3}{4}} = 0.1393358858, \mu_{34\frac{3}{4}} = 0.08690387937, \mu_{44\frac{3}{4}} = 0.04171386190. \end{aligned}$$

Эта работа является первым шагом в исследовании задач восстановления значений гармонических функций на многомерных шарах.

Литература

1. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Эдиториал УРСС, 2003.—175 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.—М.: Физматлит, 2001.—Т. 1.—680 с.
3. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения.—М.: Наука, 1976.—320 с.
4. Magaril-Ilyayev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M. Optimal recovery and extremum theory // Computational Methods and Function Theory.—2002.—№ 2.—С. 87–112.
5. Крейн М. Г. К теории наилучших приближений периодических функций // Докл. АН СССР.—1938.—Т. 18, № 4/5.—С. 245–251.

Статья поступила 26.11.2004 г.

Близнюк Станислав Викторович
г. Москва, Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: stanislav-b@mail.ru