

УДК 510.6

КРИТЕРИЙ РАЗЛОЖИМОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ

Д. К. Пономарёв

Аннотация. Установлена однозначность разложения элементарной теории на неразложимые компоненты. Сформулирован критерий разложимости.

Ключевые слова: разложимая теория, декомпозиция теорий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Теория \mathcal{T} сигнатуры Σ называется *разложимой*, если она является дедуктивным замыканием всех предложений некоторых теорий $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ дизъюнктивных сигнатур $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, в исчислении предикатов сигнатуры Σ (обозначаем $\mathcal{T} = \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2$). Теории $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ будем называть *компонентами (разложения) теории \mathcal{T}* .

Как правило, при изучении теорий нас будут интересовать нетривиальные разложения, в которых $\Sigma_1 \neq \emptyset \neq \Sigma_2$. При этом будем полагать, что каждая компонента разложения включает все формулы чистого равенства теории \mathcal{T} . Тогда каждая компонента \mathcal{S}_i сигнатуры Σ_i включает все предложения сигнатуры Σ_i из теории \mathcal{T} . К примеру, если сигнатура Σ состоит только из одного символа A , то любая теория этой сигнатуры имеет только тривиальное разложение.

Сформулируем основную задачу, которую мы исследуем в данной работе. Рассмотрим теорию \mathcal{T} сигнатуры Σ , определенную некоторым множеством предложений Φ сигнатуры Σ . Как, исходя из системы аксиом Φ , определить, является ли разложимой теория \mathcal{T} ?

Эта задача поставлена Д. Е. Пальчуновым в работе [1]. Интерес к этой проблеме исходит из практики и связан с такими задачами, как разработка систем автоматического доказательства теорем [2] и сопровождение терминологических систем [3, 4].

В данной работе представим решение указанной задачи. В разд. 1 введем понятие неразложимого предложения и заметим, что такие предложения определяют компоненты разложения теории. Далее сформулируем результат об однозначности разложения элементарной теории на неразложимые компоненты. Отметим, что главным теоретико-модельным инструментом исследования в статье служит интерполяционная теорема Крейга [5]. В разд. 2 опишем метод определения компонент разложения по заданной теории. Исходя из этого метода, сформулируем критерий разложимости.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Д. Е. Пальчунову и анонимному рецензенту за ценные рекомендации по улучшению содержания статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-04003-ННИО_а) и DFG project COMO, GZ: 436 RUS 113/829/0-1.

1. Теорема об однозначности разложения

Предложение 1. Пусть \mathcal{P}, \mathcal{Q} — теории дизъюнктивных сигнатур $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, а φ — некоторое предложение сигнатуры Σ . Если φ следует из объединения теорий \mathcal{P}, \mathcal{Q} , то найдутся предложения $\theta \in \mathcal{P}, \phi \in \mathcal{Q}$ такие, что $\theta, \phi \vdash \varphi$, причем предложение θ содержит только те символы сигнатуры Σ_1 , которые встречаются в φ , и предложение ϕ содержит только те символы сигнатуры Σ_2 , которые встречаются в φ .

Так как $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \vdash \varphi$, то найдутся предложения $P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}$, для которых $P, Q \vdash \varphi$. Тогда $P \vdash Q \rightarrow \varphi$.

Поскольку P и Q — формулы сигнатур Σ_1, Σ_2 , не имеющих общих символов, по интерполяционной теореме Крейга найдется предложение θ , содержащее только символы сигнатуры Σ_1 , которые присутствуют в φ . При этом $P \vdash \theta$ и $\theta \vdash Q \rightarrow \varphi$. Отсюда $Q \vdash \theta \rightarrow \varphi$.

Аналогично существует такое предложение ϕ , которое содержит только символы сигнатуры Σ_2 , включенные в формулу φ , для которого $Q \vdash \phi, \phi \vdash \theta \rightarrow \varphi$. Следовательно, $\theta, \phi \vdash \varphi$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рассмотрим теорию \mathcal{T} и предложение $\varphi \in \mathcal{T}$. Назовем φ *разложимым в теории \mathcal{T}* , если найдутся такие предложения $\theta \in \mathcal{T}, \psi \in \mathcal{T}$, которые включают символы только из φ , не содержат общих сигнатурных символов, не являются формулами чистого равенства и для которых выполнена секвенция $\theta, \psi \vdash \varphi$. При этом θ и ψ будем называть *фрагментами разложения φ* .

Если таких θ, ψ не существует, то предложение φ будем называть *неразложимым в теории \mathcal{T}* .

Лемма 1. Рассмотрим теорию \mathcal{T} и некоторое предложение $\varphi \in \mathcal{T}$. Тогда в теории \mathcal{T} найдется последовательность неразложимых предложений ϕ_1, \dots, ϕ_n таких, что $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \varphi$.

Рассмотрим множество $T_1 = \{\varphi\}$. Возьмем фрагменты разложения ϕ, ψ для предложения φ , если таковые найдутся в теории \mathcal{T} ; построим множество $T_2 = \{\phi, \psi\}$. Применим указанное преобразование к предложениям из T_2 и будем повторять его, образуя последовательность T_1, T_2, T_3, \dots . Каждое предложение содержит лишь конечное число сигнатурных символов, поэтому каждое предложение может быть последовательно разложено только конечное число раз. Таким образом, для некоторого k множество $T_k = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ будет содержать только неразложимые предложения, для которых $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \varphi$.

Теорема 1. Пусть \mathcal{T} — теория сигнатуры Σ . Тогда \mathcal{T} имеет единственное разложение на неразложимые компоненты. Более точно, существует единственное разбиение Π сигнатуры Σ такое, что $\mathcal{T} = \uplus\{\mathcal{T}_\sigma \mid \sigma \in \Pi\}$, где \mathcal{T}_σ — теория, состоящая в точности из всех предложений теории \mathcal{T} сигнатуры σ и не имеющая нетривиальных разложений.

Пусть $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$ — теория сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, состоящая из всех предложений теории \mathcal{T} этой сигнатуры. Тогда \mathcal{T}_1 является компонентой разложения теории \mathcal{T} в том и только в том случае, если выполнено следующее условие (*): для любого предложения φ сигнатуры $\Sigma_\varphi \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$, неразложимого в \mathcal{T} , имеет место включение $\Sigma_\varphi \subseteq \Sigma_1$.

Докажем это утверждение.

\Rightarrow Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \uplus \mathcal{T}_2$, где \mathcal{T}_2 — теория сигнатуры $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$. Предположим, что $\Sigma_\varphi \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \vdash \varphi$ и по предложению 1 φ разложимо, что противоречит условию.

\Leftarrow Пусть \mathcal{S}_2 — теория сигнатуры $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$, состоящая из всех предложений теории \mathcal{T} сигнатуры Σ_2 . Пусть ψ — некоторое предложение теории \mathcal{T} . Тогда по лемме 1 в \mathcal{T} найдется последовательность неразложимых предложений ϕ_1, \dots, ϕ_n таких, что $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$. В силу условия (*) имеем $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ и, следовательно, $\mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2 \vdash \psi$.

Таким образом, некоторое подмножество $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ соответствует неразложимой компоненте теории \mathcal{T} тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию (*) и не имеет собственного подмножества, удовлетворяющего этому условию. Заметим, что совокупность подмножеств сигнатуры Σ , удовлетворяющих условию (*), замкнута относительно пересечений, следовательно, любой символ сигнатуры Σ содержится в единственном минимальном подмножестве сигнатуры Σ со свойством (*), и эти минимальные подмножества не пересекаются. \square

2. Критерий разложимости

Из доказательства теоремы 1 следует, что любое неразложимое предложение теории \mathcal{T} содержит сигнатурные символы только из одной компоненты разложения. Это позволяет определить разбиение сигнатуры и компоненты разложения теории \mathcal{T} , исходя из системы аксиом теории \mathcal{T} .

Формализуем полученный результат с помощью следующего ниже понятия. Приведем его для произвольной системы аксиом Φ некоторой теории \mathcal{T} сигнатуры Σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Два сигнатурных символа $p, q \in \Sigma$ назовем *непосредственно связанными* (системой аксиом Φ теории \mathcal{T}), если p и q входят в одну аксиому $\psi \in \Phi$.

Символы p, q назовем *связанными* (системой аксиом Φ), если найдется такая последовательность символов $p = t_1, \dots, t_k = q$, в которой любая соседняя пара t_i, t_{i+1} связана непосредственно.

Таким образом, для заданной системы аксиом Φ определяется неориентированный помеченный граф (с петлями в вершинах), вершинами которого служат символы сигнатуры, а аксиомы определяют связывающие их ребра. Отношение связности является отношением эквивалентности, так что множество Σ разбивается на компоненты связности — классы эквивалентности. Будем говорить, что система аксиом Φ *определяет компоненты связности на сигнатуре Σ* .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Любая теория \mathcal{T} имеет систему аксиом, состоящую из предложений, неразложимых в \mathcal{T} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть \mathcal{T} — теория сигнатуры Σ и Φ — система аксиом теории \mathcal{T} , состоящая из предложений, неразложимых в \mathcal{T} . Тогда Φ определяет на сигнатуре Σ компоненту связности $\sigma \subseteq \Sigma$ в том и только в том случае, если $\sigma \in \Pi$, где Π — разбиение сигнатуры Σ , отвечающее разложению теории \mathcal{T} на неразложимые компоненты.

В силу теоремы 1 получаем, что любая система аксиом теории \mathcal{T} , неразложимых в \mathcal{T} , определяет одни и те же компоненты связности на сигнатуре теории \mathcal{T} . Таким образом, приходим к критерию разложимости элементарной теории \mathcal{T} .

Критерий разложимости. Теория \mathcal{T} сигнатуры Σ является разложимой тогда и только тогда, когда некоторая система аксиом теории \mathcal{T} , неразложимых в \mathcal{T} , индуцирует более чем одну компоненту связности на сигнатуре Σ .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Palchunov D.* GABEK for ontology generation // Integration and learning in organizations / J. Zelger, P. Herdina, A. Oberprantacher. Wien: LIT-publ. Comp., 2005. Bd II.
2. *Amir E., McIlraith S.* Partition-based logical reasoning for first-order and propositional theories // Artificial Intelligence. 2005. V. 162, N 1–2. P. 49–88.
3. *Cuenca-Grau B., Parsia B., Sirin E., Kalyanpur A.* Modularity and Web ontologies: Proc. / KR2006. 2006. P. 198–208.
4. *Lutz C., Walther D., Wolter F.* Conservative extensions in expressive description logics: Proc. / IJCAI-07. 2007. P. 453–458.
5. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 17 июля 2006 г., окончательный вариант — 10 мая 2007 г.

Пономарёв Денис Константинович
Институт систем информатики СО РАН им. А. П. Ершова,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
ponom@iis.nsk.su