

APPROXIMATION DES LIGNES MAGNÉTIQUES UTILISANT LA TRANSFORMATION LIE

C. Dumitrescu

Abstract

§1 présente une méthode d'intégration des systèmes dynamiques de premier ordre, connue sous le nom de la Transformation Lie.

Cette méthode est fondée sur la Théorie des Perturbations, précisément sur la représentation du champ d'état à l'aide d'une série de puissances (puissances du paramètre de perturbation, ε [3], [4], [5], [7]).

§2 est une application de la Transformation Lie concernant la détermination des "lignes magnétiques" associées aux "conducteurs coniques finis"; elle préserve le caractère itératif des formules soulignant ainsi la possibilité de passer à la simulation numérique pour d'autres configurations de conducteurs.

Mathematics Subject Classification (1999): 78A25, 65L99

Key words: système dynamique, transformation Lie, champ Biot-Savart-Laplace, ligne magnétique.

1 Quelques propriétés importantes dans la Théorie de la Transformation Lie

Soient les systèmes différentiels

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sum_{n=0}^N \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{f}_n(x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \sum_{n=0}^N \frac{\varepsilon^n}{n!} \check{g}_n(y) \quad (2)$$

où $t \in I \subset \mathbf{R}$ (l'intervalle I fixé) et les fonctions

$$x = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbf{R}^M \rightarrow \hat{f}_n(x) \in \mathbf{R}^M, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

$$y = (y_1, \dots, y_M) \in \mathbf{R}^M \rightarrow \check{g}_n(y) \in \mathbf{R}^M, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

sont des fonctions de classe C^k , $k \geq N$.

Définition 1. On dira que le système (2) est le transformé Lie du système (1) si, $(\forall)y$ solution pour (2) et $(\forall)x$ solution pour (1), existent les fonctions

$$\check{x}_n(y_1, \dots, y_M) : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

de sorte que

$$x(t) = y(t) + \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon^n}{n!} \check{x}_n(y(t)) \stackrel{not}{=} \check{x}(y, \varepsilon). \quad (3)$$

La Théorie de la Transformation Lie détermine les fonctions \check{g}_n (à partir des fonctions \hat{f}_n) de sorte que le système (2) soit plus convenable que (1) (et les équations qui nous donnent \check{x}_n , $n = 1, 2, \dots, N$ soient convenables).

Considérons les fonctions

$$\begin{aligned} \hat{h}(x, \varepsilon) &= \hat{h}(x_1, \dots, x_M, \varepsilon) : \mathbf{R}^M \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^M, \\ \check{h}(y, \varepsilon) &= \check{h}(y_1, \dots, y_M, \varepsilon) : \mathbf{R}^M \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^M, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \check{x}(y, \varepsilon) &= \check{x}(y_1, \dots, y_M, \varepsilon) : \mathbf{R}^M \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^M, \\ \hat{y}(x, \varepsilon) &= \hat{y}(x_1, \dots, x_M, \varepsilon) : \mathbf{R}^M \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^M, \end{aligned}$$

ayant les propriétés

$$\begin{aligned} \hat{h}(\check{x}(y, \varepsilon), \varepsilon) &= \check{h}(y, \varepsilon), \quad \forall (y, \varepsilon) \in \mathbf{R}^M \times \mathbf{R} \\ \check{h}(\hat{y}(x, \varepsilon), \varepsilon) &= \hat{h}(x, \varepsilon), \quad \forall (x, \varepsilon) \in \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Admettons qu'il y a les fonctions \hat{h}_n et \check{h}_n , $n = 0, 1, \dots, N$ de sorte que

$$\hat{h}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{h}_n(x), \quad \forall (x, \varepsilon) \in \mathbf{R}^M \times \mathbf{R} \quad (5)$$

et

$$\check{h}(y, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \frac{\varepsilon^n}{n!} \check{h}_n(y), \quad \forall (y, \varepsilon) \in \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}. \quad (6)$$

Proposition 1. Dans les conditions (3), (4), (5), (6), on a:

$$\check{h}_0(y) = \hat{h}_0|_{x=y} \quad (7)$$

$$\check{h}_1(y) = \hat{h}_1(x)|_{x=y} + \frac{\partial \check{h}_0}{\partial y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (8)$$

$$\check{x}_1(y) = - \frac{\partial \hat{y}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (9)$$

Conséquence: Si les relations (3), (4), (5), (6) sont vraies, alors

$$\hat{h}_1(x)|_{x=y} = \check{h}_1(y) - \frac{\partial \check{h}_0}{\partial y} \check{x}_1(y). \quad (10)$$

Pour déterminer les corrélations concernant les fonctions \hat{h}_n et \check{h}_n utilisées dans les formules (5), (6), la théorie de la transformation Lie a comme point de départ la fonction

$$\check{w}(y, \varepsilon) = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \varepsilon} \Big|_{x=\check{x}(y, \varepsilon)} \stackrel{\text{not}}{=} w.$$

Si on détermine les dérivées partielles $\frac{\partial \hat{h}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$, $\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}$ etc alors on obtient les relations visées.

Proposition 2. Supposons qu'il y a les fonctions $w_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, N$ de sorte que

$$w = w_1(y) + \frac{\varepsilon^1}{2!} w_2(y) + \dots + \frac{\varepsilon^{N-1}}{(N-1)!} w_N(y). \quad (11)$$

Alors, dans les conditions (3), (4), (5), (6), on a:

$$\hat{h}_1(x) \Big|_{x=y} = \check{h}_1(y) + \frac{\partial \check{h}_0}{\partial y} w_1 \quad (12)$$

$$\hat{h}_2(x) \Big|_{x=y} = \check{h}_2(y) + 2 \frac{\partial \check{h}_1}{\partial y} w_1 + \left(\frac{\partial}{\partial y} w_1 \right)^2 \check{h}_0 + \frac{\partial \check{h}_0}{\partial y} w_2 \quad (13)$$

$$\check{x}_1 = -w_1 \quad (14)$$

$$\check{x}_2 = \frac{\partial w_1}{\partial y} w_1 - w_2. \quad (15)$$

Conséquence. Dans les conditions de la Définition 1, les fonctions $\check{f}_n(y) = \hat{f}_n(\check{x}(y, \varepsilon))$, $n = 0, 1, \dots, N$ satisferont les égalités suivantes:

$$\check{f}_0 = \check{g}_0$$

$$\check{f}_1 = \check{g}_1 + \frac{\partial \check{x}_1}{\partial y} \check{g}_1 + \mathcal{L}_{\check{g}_0}(\check{x}_1)$$

$$\check{f}_2 = \check{g}_2 + 2 \frac{\partial \check{x}_1}{\partial y} \check{g}_1 + \frac{\partial \check{x}_2}{\partial y} \check{g}_0 = \check{g}_2 + 2 \mathcal{L}_{\check{g}_1}(\check{x}_1) + \mathcal{L}_{\check{g}_0}(\check{x}_2)$$

$$\check{f}_N = \check{g}_N + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \mathcal{L}_{\check{g}_{N-n}}(\check{x}_n)$$

(où $\mathcal{L}_g(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} g$ représente le produit de la matrice de Jacobi, $\frac{\partial(\cdot)}{\partial y}$, et de la fonction g).

À l'aide de l'opérateur de Nayfeh,

$$L_i = \mathcal{L}_{w_i}(\cdot) - \mathcal{L}_{(\cdot)}(w_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

on peut exprimer les corrélations entre les fonctions \check{g}_n et \hat{f}_n .

Proposition 3. Dans les conditions de la Proposition 2 et de sa Conséquence, nous avons

$$\check{g}_0 = \check{f}_0 = \hat{f}_0 \Big|_{x=y}$$

$$\begin{aligned}\check{g}_1 &= \hat{f}_1|_{x=y} - L_1(\check{g}_0) \\ \check{g}_2 &= \hat{f}_2|_{x=y} - L_2(\check{g}_0) - L_1(\hat{f}_1|_{x=y} + \check{g}_1) \\ \check{g}_N &= \hat{f}_N|_{x=y} - L_N(\check{g}_0) - \sum_{n=1}^{N-1} L_{N-n}(\hat{f}_n|_{x=y} + \check{g}_n).\end{aligned}$$

Observation. La Proposition 3 nous offre la possibilité de déterminer les fonctions \check{g}_n , $n = 0, 1, \dots, N$ si nous connaissons w_1, \dots, w_N ; dans cette situation, on peut écrire le système (2) (à partir du système (1)) et sa solution, y).

La Proposition 2 nous donnera les fonctions $\check{x}_1, \check{x}_2, \dots, \check{x}_N$ et la formule (3) nous conduira à la solution x pour le système (1).

On s'aperçoit que l'élément essentiel c'est la détermination des fonctions w_1, \dots, w_N de la relation (11). Une façon de procéder concerne la décomposition des fonctions f_i :

$$\hat{f}_i = \hat{f}_i^p + \hat{f}_i^s, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

qui réalisera:

- a) un passage convenable au système (2) (à partir de (1))
- b) une détermination convenable de w_1, \dots, w_N .

Si on impose les conditions

$$\check{g}_i = \hat{f}_i^p|_{x=y}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

alors le système (2) devient

$$\dot{y} = \hat{f}_0|_{x=y} + \frac{\varepsilon}{1!} \hat{f}_1^p|_{x=y} + \dots + \frac{\varepsilon^N}{N!} \hat{f}_N^p|_{x=y},$$

tandis que les relations de la Proposition 3 s'exprimeront par:

$$\begin{aligned}L_1(\check{g}_0) &= \hat{f}_1^s|_{x=y} \\ L_2(\check{g}_0) + L_1(\hat{f}_1^s|_{x=y} + \check{g}_1) &= \hat{f}_2^s \quad \text{etc.}\end{aligned}\tag{16}$$

Dans le cas d'un système différentiel Bolotin

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} z_j + \sum_{j,k=1}^M b_{ijk} z_j z_k + \sum_{j,k,l=1}^M c_{ijkl} z_j z_k z_l + \dots\tag{17}$$

$$i = 1, 2, \dots, M, a_{ij}, b_{ijk}, c_{ijkl} \in \mathbf{R}$$

(où M c'est la dimension du champ vectoriel d'état), la transformation $z = \varepsilon x$ nous conduira au système

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} x_j + \frac{\varepsilon}{1!} \sum_{j,k=1}^M B_{ijk} x_j x_k + \frac{\varepsilon^2}{2!} \sum_{j,k,l=1}^M C_{ijkl} x_j x_k x_l + \dots\tag{17}$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

qui admet la représentation vectorielle suivante

$$\dot{x} = Ax + \frac{\varepsilon}{1!}\hat{f}_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\hat{f}_2(x) + \dots \quad (18)$$

où

$$A = (a_{ij}),$$

$$\hat{f}_1(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j,k=1}^M B_{1jk}x_jx_k \\ \vdots \\ \sum_{j,k=1}^M B_{Mjk}x_jx_k \end{pmatrix}; \quad \hat{f}_2(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j,k,l=1}^M C_{1jkl}x_jx_kx_l \\ \vdots \\ \sum_{j,k,l=1}^M C_{Mjkl}x_jx_kx_l \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Remarquons que le système différentiel (18) est un cas particulier du système (1) ($\hat{f}_0(x) = Ax$) et que, par conséquence, le transformé Lie aura la forme

$$\dot{y} = Ay + \frac{\varepsilon}{1!}\check{g}_1(y) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\check{g}_2(y) + \dots;$$

dans les conditions $\check{g}_i = \hat{f}_i^p|_{x=y}$, $i = 1, 2, \dots, N$, ce système s'écrira:

$$\dot{y} = Ay + \frac{\varepsilon}{1!}\hat{f}_1^p|_{x=y} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\hat{f}_2^p|_{x=y} + \dots \quad (19)$$

Les relations (16) dans le cas du système différentiel (19) nous permettront d'obtenir w_1, w_2, \dots, w_N parcequ'elles deviendront:

$$\begin{aligned} A \left(w_1 - \frac{\partial w_1}{\partial y} y \right) &= \hat{f}_1^s \Big|_{x=y} \\ A \left(w_2 - \frac{\partial w_2}{\partial y} y \right) + L_1(\hat{f}_1|_{x=y}) &= \hat{f}_2^s \Big|_{x=y} \\ A \left(w_N - \frac{\partial w_N}{\partial y} y \right) + \sum_{n=1}^{N-1} L_{N-n}(\hat{f}_n|_{x=y}) &= \hat{f}_N^s \Big|_{x=y}. \end{aligned} \quad (20)$$

2 L'approximation des lignes magnétiques à l'aide de la Transformation Lie

2.1 Le cas d'un circuit parabolique

Considérons un conducteur électrique modélé par l'arc de parabole

$$\gamma : x = \frac{1}{2p}t^2 = x(t); y = 0 = y(t); z = t = z(t), \quad t \in [0, T],$$

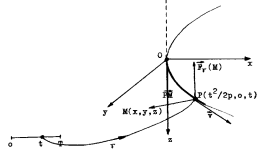
$p > 0, T > 0$ constantes.

Le champ Biot-Savart-Laplace [1], [2] sera

$$\vec{F}_\gamma(M) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \int_\gamma \frac{\vec{v} \times \vec{PM}}{PM^3} d\tau_P,$$

où

$$PM^3 = \|PM\|^3 = \left[\left(x - \frac{t^2}{2p} \right)^2 + y^2 + (z - t)^2 \right]^{3/2}$$



et

$$\vec{v} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Les composantes du champ \vec{F}_γ ont les expressions [1]

$$\begin{aligned} F_x &= -y \int_0^T \frac{dt}{PM^3}, \\ F_y &= x \int_0^T \frac{dt}{PM^3} - \frac{1}{p} z \int_0^T \frac{tdt}{PM^3} + \frac{1}{2p} \int_0^T \frac{t^2 dt}{PM^3}, \\ F_z &= \frac{1}{p} \int_0^T \frac{tdt}{PM^3}. \end{aligned}$$

Dans [1] elles ont été exprimées à l'aide des intégrales elliptiques mais cela rend difficile la simulation numérique des lignes du champ; c'est pourquoi nous utiliserons la transformation Lie.

2.1.1 Une approximation cubique des fonctions F_x, F_y, F_z

Pour la fonction $\varphi(u, v, w) = (u^2 + v^2 + w^2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{*3})$, la formule de Taylor autour du point $(u_0, v_0, w_0) = (0, 1, 0)$ donne l'approximation

$$\begin{aligned} \varphi(u, v, w) &\approx \varphi(0, 1, 0) + \frac{1}{1!} d\varphi((0, 1, 0); (u, v - 1, w)) + \\ &+ \frac{1}{2!} d^2\varphi((0, 1, 0); (u, v - 1, w)) = \\ &= 1 + 2\alpha(v - 1) + \alpha u^2 + (2\alpha^2 - \alpha)(v - 1)^2 + \alpha w^2. \end{aligned}$$

Si l'on prend $\alpha = -\frac{3}{2}$, $u = x - \frac{t^2}{2p}$, $v = y$, $w = z - t$, alors on trouve l'approximation:

$$\begin{aligned}
F_x &= \left(-\frac{3T^5}{40p^2} - \frac{T^3}{2} + 10T \right) x + \left(\frac{T^3}{2p} x^2 - 15Txy + \frac{3T^2}{2} xz \right) + \left(-\frac{3T}{2} x^3 + 6Txy^2 - \frac{3T}{2} xz^2 \right), \\
F_y &= \left(-\frac{3T^7}{112p^3} - \frac{3T^5}{20} + \frac{5T^3}{3p} \right) + \left(\frac{3T^5}{40p^2} - \frac{T^3}{2} + 10T \right) x - \frac{5T^3}{2p} y + \\
&+ \left(-\frac{T^6}{16p^3} + \frac{3T^4}{4p} - \frac{5T^2}{p} \right) z + \frac{T^3}{4p} x^2 + \frac{T^3}{p} y^2 - \frac{5T^3}{4p} z^2 - 15Txy + \\
&+ \frac{15T^2}{2p} yz + \left(\frac{3T^5}{2} - \frac{3T^4}{8p^2} \right) xz - \frac{3T}{2} x^3 + \frac{3T^2}{4p} z^3 + \frac{3T^2}{4p} x^2 z + \\
&+ 6Txt^2 - \frac{3T}{2} xz^2 - \frac{3T}{p} y^2 z, \\
F_z &= \left(-\frac{T^6}{16p^3} - \frac{3T^4}{8p} + \frac{5T^2}{p} \right) p + \left(-\frac{15T^2}{2p} y^2 + \frac{3T^4}{8p^2} xy + \frac{T^3}{p} yz \right) + \\
&+ \left(\frac{3T^2}{p} y^3 - \frac{3T^2}{4p} x^2 y - \frac{3T^2}{4p} yz^2 \right).
\end{aligned} \tag{21}$$

2.1.2 L'approximation des lignes de champ

Les lignes du champ Biot-Savart-Laplace, \vec{F}_γ , sont données par le système différentiel de premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = F_x, \quad \frac{dy}{dt} = F_y, \quad \frac{dz}{dt} = F_z.$$

ou,

$$\dot{z}_i = \frac{dz_i}{dt} = F_{z_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

si l'on note $x = z_1$, $y = z_2$, $z = z_3$.

Les approximations (21) nous ramènent à

$$\dot{z}_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij} z_j + \sum_{j,k=1}^3 b_{ijk} z_j z_k + \sum_{j,k,l=1}^3 c_{ijkl} z_j z_k z_l, \quad i = 1, 2, 3. \tag{22}$$

Le système (22) n'est pas un système Bolotin mais il est évident que sa solution est la somme des deux solutions suivantes:

- la solution du système $\dot{z}_i = \alpha_i$, notées z^C ($z_i = \alpha_i t + \beta_i$)
- la solution du système Bolotin

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} z_j + \sum_{j,k=1}^3 b_{ijk} z_j z_k + \sum_{j,k,l=1}^3 c_{ijkl} z_j z_k z_l, \tag{23}$$

notée z^L .

La transformation $z = \varepsilon x$ ramène le système (23) au système

$$\dot{x} = Ax + \frac{\varepsilon}{1!} \hat{f}_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \hat{f}_2(x) \tag{24}$$

où

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3T^5}{4p^2} + \frac{T^3}{2} + 10T & 0 \\ \frac{3T^5}{4p^2} - \frac{T^3}{2} + 10T & -\frac{5T^3}{2p} & \frac{T^6}{16p^3} + \frac{3T^4}{4p} - \frac{5T^2}{p} \\ 0 & -\frac{T^6}{16p^3} - \frac{3T^4}{8p} + \frac{5T^2}{p} & 0 \end{pmatrix} \\
 \hat{f}_1(x) &= \begin{pmatrix} 15Tx_2^2 - \frac{T^3}{2p}x_1x_2 - \frac{3T^2}{2}x_1x_3 \\ \frac{T^3}{4p}x_1^2 + \frac{T^3}{p}x_1^2 - \frac{5T^3}{4p}x_3^2 - 15x_1x_2 + \frac{15T^2}{2p}x_2x_3 + \left(\frac{3T^2}{2} - \frac{3T^4}{8p^2}\right)x_3x_1 \\ -\frac{15T^2}{2p}x_2^2 + \frac{3T^4}{8p^2}x_1x_2 + \frac{T^3}{p}x_2x_3 \end{pmatrix} = \\
 &\quad \stackrel{not}{=} \begin{pmatrix} f_{1,1}(x) \\ f_{2,1}(x) \\ f_{3,1}(x) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_2(x) &= \begin{pmatrix} -6Tx_2^3 + \frac{3T^3}{2}x_1^2x_2 + \frac{3T}{2}x_1x_3^2 \\ -\frac{3T}{2}x_1^3 + \frac{3T^2}{4p}x_2^3 + \frac{3T^2}{4p}x_1^2x_3 + 6x_1x_2^2 - \frac{3T^2}{2}x_1x_3^2 - \frac{3T}{p}x_2^2x_3 \\ \frac{3T^2}{p}x_2^3 - \frac{3T^2}{4p}x_1^2x_2 - \frac{3T^2}{4p}x_2x_3^2 \end{pmatrix} = \\
 &\quad \stackrel{not}{=} \begin{pmatrix} f_{1,2}(x) \\ f_{2,2}(x) \\ f_{3,2}(x) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Le système différentiel (24) est un cas particulier du (18); nous ferons les options: $\hat{f}_1^p = 0$, $\hat{f}_2^p = 0$ afin que le système (19) devient

$$\dot{y} = Ay \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = a_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ \dot{y}_3 = a_{32}y_2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_2 - a_{22}\dot{y}_2 - (a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32})y_2 = 0.$$

La solution de cette équation de second ordre est immédiate et y_1 , y_3 peuvent être déterminées par intégration directe.

Cherchons maintenant, les fonctions

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_2 = \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ w_{3,2} \end{pmatrix}$$

tenant compte qu'on a imposé les conditions $\hat{f}_1^p, \hat{f}_2^p = 0$ et, donc, $\hat{f}_i^s = \hat{f}_i, i = 1, 2$.

Conformément aux relations (20) la fonction w_1 doit vérifier l'équation

$$A \left(w_1 - \frac{\partial w_1}{\partial y} y \right) = \hat{f}_1 \Big|_{x=y}. \quad (25)$$

La forme polynomiale des composantes $f_{1,1}, f_{2,1}, f_{3,1}$ suggère une détermination de la fonction w_1 sous la forme

$$w_1 = \begin{pmatrix} \sum_i \alpha_{ii} y_i^2 + \sum_{i<j} \alpha_{ij} y_i y_j \\ \sum_i \beta_{ii} y_i^2 + \sum_{i<j} \beta_{ij} y_i y_j \\ \sum_i \gamma_{ii} y_i^2 + \sum_{i<j} \gamma_{ij} y_i y_j \end{pmatrix},$$

où les coefficients α, β, γ seront obtenus à l'aide de (25).

On constate que

$$w_1 - \frac{\partial w_1}{\partial y} y = -w_1$$

et, finalement, on trouve

$$w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_{12}} f_{1,1} \Big|_{x=y} \\ \frac{a_{21}}{a_{12} a_{22}} f_{1,1} \Big|_{x=y} + \frac{a_{23}}{a_{32} a_{22}} f_{3,1} \Big|_{x=y} - \frac{1}{a_{22}} f_{2,1} \Big|_{x=y} \\ -\frac{1}{a_{32}} f_{3,1} \Big|_{x=y} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur de Nayfeh est déterminé par la relation

$$L_1(\hat{f}_1|_{x=y}) = \mathcal{L}_{w_1}(\hat{f}_1|_{x=y}) - \mathcal{L}_{\hat{f}_1|_{x=y}}(w_1) = \frac{\partial \hat{f}_1|_{x=y}}{\partial y} w_1 - \frac{\partial w_1}{\partial y} \hat{f}_1|_{x=y}.$$

De même manière on peut déterminer w_2 et, conf. (14) et (15),

$$x = x(t) = y + \frac{\varepsilon}{1!} \tilde{x}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \tilde{x}_2 = y(t) - \frac{\varepsilon^2}{1!} w_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} w_1 - w_2 \right)$$

sera la solution du système (24); par conséquence, $z^L = \varepsilon x$ sera la solution du système (23).

Finalement, $z = z^L + z^C$ représente la solution approximative pour le système différentiel des lignes de champ.

Remarque. Le champ Biot-Savart-Laplace est solénoïdal; pourtant la matrice A a

$$\text{tr} A = a_{22} = -\frac{5T^3}{p} \neq 0$$

parcequ'on a fait une *approximation* des composantes du champ.

Problème ouvert: Est'il a_{22} une mesure de l'approximation faite ?

2.2 Le cas d'un circuit elliptique ou parabolique

Dans [1], on constate que l'expression des composantes du champ Biot-Savart-Laplace est pareille pour tous les conducteurs; par conséquent on peut faire une approximation similaire des lignes de champ.

References

- [1] Udriște, C., Radu, C., Dumitrescu, C., Zlătescu, A., *Intégrales Biot-Savart-Laplace*, Tensor NS, CHIGASAKI, Japan, 1993, vol. 54, pp.196-201.
- [2] Udriște, C., Udriște, S., *Biot-Savart-Laplace dynamical system*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 1996, vol. 1, nr.2, pp.125-136.
- [3] Nayfeh, A., *Perturbation Methods*, Wiley, New York, 1973.
- [4] Morino, L., Mastrodi, F., Cutroni, M., *Lie transformation method for dynamical system having chaotic behaviour*, Nonlinear Dynamics, No. 7, Holland, 1975.
- [5] Bolotin, V., *Nonconservative problems for the theory of elastic stability*, Oxford, Pergamon, 1963.
- [6] Kaunadis, A., N., *Some new stability aspects for nonconservative systems*, Journal of Mechanical Science, no. 33, 1991, pp. 297-311.
- [7] Leiholtz, H.H.E., *Analysis of nonconservative, nonholonomic systems*, IUTAM, 1980.
- [8] Udriște C., Postolache M. and Soeanu A., Computer simulation of magnetic phase portraits and geometric dynamics around piecewise rectilinear circuits, this volume, pp. 130-140.
- [9] Udriște C., Balan V. and Udriște A., Magnetic fields generated by piecewise rectilinear circuits, this volume, pp. 141-169.
- [10] Zlătescu A., Un studiu al pendulului dublu în modelare neliniară, Teză de doctorat, Univ. București, 1998.

Author's address:

C. Dumitrescu

Politehnica University of Bucharest, Department of Mathematics I

Splaiul Independenței 313, 77206 Bucharest, Romania

E-mail: udriste@mathem.pub.ro