

Sobre una estructura diferencial cuántica

BERENICE GUERRERO

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

ABSTRACT. We obtain a non-commutative differential structure associated with the Lie bialgebra of the Lie group $G = ST(2)$. We construct this structure by means a quantum matrix generated by a classic r -matrix on $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. We prove that this space is generated by the differential form of the Lie group G and we also prove that this space is a graded Hopf –Poisson algebra with a suitable bracket.

Key words and phrases. Lie-Poisson groups, Hopf-Poisson algebra, r -matrix, Yang-Baxter equation, Poisson bracket, quantum group, non-commutative calculus.

1991 Mathematics Subject Classification (1994 Revision). Primary 17 B 37. Secondary 16 W 30, 17 B 66.

RESUMEN. Se construye una estructura diferencial no conmutativa, asociada a la bialgebra de Lie del grupo triangular $G = ST(2)$, a partir de una R -matriz cuántica inducida por una r -matriz clásica del espacio $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Se prueba que este espacio puede definirse en términos de las formas diferenciales del grupo de Lie G y es un álgebra de Hopf-Poisson graduada con un corchete apropiado.

0. Introducción

De la misma forma como se acostumbra a definir la estructura diferencial de un grupo de Lie en términos de las funciones coordenadas del grupo, (ver [11]), construimos aquí una estructura diferencial no conmutativa sobre el grupo

Trabajo parcialmente financiado por el CINDEC y COLCIENCIAS .

cuántico $ST_q(2)$ en términos de las funciones coordenadas del grupo de Lie $ST(2)$ y de sus diferenciales.

A partir de un r -tensor antisimétrico del espacio $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ (\mathcal{G} es el álgebra de Lie de $ST(2)$), que satisface la ecuación de Yang–Baxter clásica (ver [23]),

$$[r_{12}, r_{23}] + [r_{12}, r_{13}] + [r_{13}, r_{23}] = 0 \quad (0.1)$$

encontramos una solución R , (R -matriz cuántica), de la ecuación de Yang–Baxter cuántica QYBE, (ver [20]),

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (0.2)$$

La matriz cuántica R induce una estructura de biálgebra no conmutativa \mathcal{A}_R sobre el espacio de las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$, (ver [19]), y nos permite definir el grupo cuántico $ST_q(2)$ del grupo de Lie $ST(2)$ como el álgebra cociente de \mathcal{A}_R sobre un cierto ideal bilátero con estructura de Álgebra de Hopf no conmutativa, (ver [6]).

Con el propósito de determinar una estructura diferencial sobre el grupo cuántico $ST_q(2)$, (ver [1], [2], [27] y [29]), construimos el espacio \mathcal{M}_h generado por las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$ y sus diferenciales, con ciertas relaciones entre sus elementos determinadas por la matriz cuántica R , y probamos que ese espacio tiene estructura de álgebra de Hopf graduada no conmutativa, y que la aplicación diferencial d definida sobre él satisface la regla de Leibniz y la relación de nilpotencia. El espacio (\mathcal{M}_h, d) con esas propiedades determina un cálculo diferencial no conmutativo sobre el grupo cuántico $ST_q(2)$ (ver [4] y [27]).

Así como la generalización de la geometría diferencial clásica, (ver [9] y [26]), se define en términos de las formas diferenciales sobre el grupo de Lie expresamos, en este caso también, el cálculo diferencial sobre el grupo cuántico $ST_q(2)$ en términos de las formas diferenciales sobre el grupo $ST(2)$, con ciertas relaciones determinadas por la R -matriz cuántica, y determinamos la estructura del espacio de formas. Probamos que el espacio de formas diferenciales sobre el grupo cuántico $ST_q(2)$ tiene estructura de álgebra de Hopf–Poisson.

1. El grupo cuántico $ST_q(2)$

Definición 1.1. $ST(2)$ es el grupo de matrices g de orden 2 con determinante uno y entradas g_j^i tales que $g_j^i = 0$ ($1 \leq j < i \leq 2$), $g_i^i > 0$ ($1 \leq i \leq 2$) llamado el grupo triangular especial de orden dos.

Definición 1.2. El álgebra de Lie $ST(2)$ del grupo $ST(2)$ es el álgebra de matrices triangulares de orden dos con traza nula generada por

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con estructura dada por el conmutador de matrices,

$$[X_1, X_2] = 2X_2, \quad [X_i, X_i] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.1)$$

Definición 1.3. El álgebra de funciones diferenciables $C^\infty(ST(2))$ sobre el grupo $ST(2)$ con valores en un campo de característica cero, (\mathbb{R} o \mathbb{C}), es el álgebra asociativa, conmutativa, con unidad, definida por el producto común entre funciones.

Definición 1.4. Las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$ son las funciones t_j^i definidas por $t_j^i(g) = g_j^i$ para toda matriz $g \in ST(2)$.

Llamamos \mathcal{A} el álgebra conmutativa con unidad de las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$, es decir, \mathcal{A} es el álgebra generada por las entradas de la matriz T

$$T = (t_j^i) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

módulo la relación $t_1^1(g)t_2^2(g) = g_1^1g_2^2 = ac = \det T = 1$, $t_2^1 = b$. \mathcal{A} tiene estructura de álgebra de Hopf conmutativa, (ver [16]) con las operaciones, producto m , coproducto Δ , counidad ε y antípoda S , definidas como sigue,

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad m(t_j^i \otimes t_l^k) = t_j^i t_l^k, \quad m(t_1^1 \otimes t_2^2) = 1,$$

$$\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad \Delta(t_j^i)(g_1, g_2) = t_j^i(\mu(g_1, g_2)) = t_j^i(g_1 g_2) = (g_1 g_2)_j^i, \quad (1.3)$$

donde μ es el producto del grupo de Lie,

$$\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon(t_j^i) = t_j^i(e) = (e)_j^i, \quad (1.4)$$

$$S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad S(t_j^i)(g) = t_j^i(g^{-1}) = (g^{-1})_j^i$$

para todo $g \in ST(2)$ y g^{-1} el inverso de g .

Un grupo cuántico del grupo de Lie $ST(2)$ es un álgebra de Hopf no conmutativa obtenida por deformación del álgebra \mathcal{A} , (ver [3] y [19]). Una cuantización de \mathcal{A} puede definirse a partir de una matriz R que sea solución de la ecuación de Yang Baxter cuántica (0.2), (también puede obtenerse por deformación directa del producto entre las funciones (ver [6]), [8] o [19]). La R -matriz cuántica induce la biálgebra \mathcal{A}_R asociada a R , la cual determina a su vez, por paso al cociente, el grupo cuántico $ST_R(2)$. Por otra parte, la R -matriz cuántica es definida por un r -tensor del espacio $ST(2)$.

Dada la base $\{X_1, X_2\}$ del espacio $ST(2)$ tomamos el r -tensor

$$r = X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1 \quad (1.5)$$

antisimétrico, el cual es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica (ver [10]). Entonces r (r -matriz clásica) determina una solución R de la ecuación de Yang Baxter cuántica, como veremos en la proposición (1.2).

Proposición 1.1. *El tensor $r = X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1$ satisface la ecuación $r^3 = 0$.*

Prueba. La proposición se obtiene de las siguientes igualdades que satisfacen los elementos X_1, X_2 con estructura (1.1) del álgebra de Lie $\mathcal{ST}(2)$.

$$X_1 X_2 = X_2, \quad X_2 X_1 = -X_2, \quad X_2^2 = 0$$

En efecto, r^3 es igual a

$$\begin{aligned} (X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1)^3 &= (-X_1 X_2 \otimes X_2 X_1 - X_2 X_1 \otimes X_1 X_2) \\ &\quad \cdot (X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1) \\ &= -X_1 X_2 X_1 \otimes X_2 X_1 X_2 + X_2 X_1 X_2 \otimes X_1 X_2 X_1 \\ &= X_2 X_1 \otimes X_2^2 - X_2^2 \otimes X_2 X_1 = 0. \end{aligned}$$

Proposición 1.2. *La matriz R definida por $R = \text{Exp}(hr)$ donde r es el r -tensor (1.5) y h es un parámetro real, es una solución de la ecuación de Yang Baxter cuántica*

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$$

con $R_{12} = R \otimes I$, $R_{23} = I \otimes R$ (R_{13} es análogo, como se verá mas adelante).

Prueba. Sabemos que r satisface las siguientes igualdades:

$$r = X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1, \quad r^2 = 2(X_2 \otimes X_2), \quad r^3 = 0$$

entonces la matriz R la podemos expresar como

$$R = \text{Exp}(hr) = I \otimes I + hr + h^2(X_2 \otimes X_2) \quad (1.6)$$

donde I es la matriz idéntica, y las matrices R_{ij} están definidas por:

$$\begin{aligned} R_{12} &= I^{\otimes 3} + hr_{12} + h^2(X_2 \otimes X_2 \otimes I), \\ R_{23} &= I^{\otimes 3} + hr_{23} + h^2(I \otimes X_2 \otimes X_2), \\ R_{13} &= I^{\otimes 3} + hr_{13} + h^2(X_2 \otimes I \otimes X_2), \end{aligned}$$

con r_{ij} los tensores (ver [10]):

$$\begin{aligned} r_{12} &= r \otimes I = X_1 \otimes X_2 \otimes I - X_2 \otimes X_1 \otimes I, \\ r_{23} &= I \otimes r = I \otimes X_1 \otimes X_2 - I \otimes X_2 \otimes X_1, \\ r_{13} &= X_1 \otimes I \otimes X_2 - X_2 \otimes I \otimes X_1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esas matrices las expresiones M y L en (1.13) son iguales a la matriz 8×8 ,

$$M = L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y los productos O y P de (1.13) son iguales a la matriz,

$$O = P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde $M + O = L + P = 0$ y con esto (1.9) es igual a (1.11), luego los productos (i) y (ii) son iguales y con ello completamos la demostración de que la matriz R en (1.6) es una solución de la QYBE (0.2).

Definición 1.5. Se denomina álgebra de matrices cuántica \mathcal{A}_R del grupo $ST(2)$, asociada a la matriz cuántica R , el álgebra no conmutativa generada por las entradas t_j^i de la matriz T (1.2) módulo la relación

$$RT_1T_2 = T_2T_1R$$

donde $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes R$ con I la matriz idéntica de orden dos y R la matriz $R = \text{Exp}(hr)$ cuyas entradas son los elementos

$$R = \begin{pmatrix} 1 & h & -h & h^2 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Proposición 1.3. *El álgebra \mathcal{A}_R determinada por la R -matriz cuántica (1.14) es una biálgebra con el co-producto Δ y la co-unidad ε definidos sobre las funciones coordenadas por*

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a, & \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes c, & \Delta(c) &= c \otimes c, \\ \varepsilon(1) &= \varepsilon(a) = \varepsilon(c) = 1, & \varepsilon(b) &= 0. \end{aligned}$$

Prueba. Sea \mathcal{A}_R el álgebra generada por las funciones coordenadas t_j^i del grupo $ST(2)$ módulo la relación $R(T_1 * T_2) = (T_2 * T_1)R$. Entonces, en términos de R , de las matrices T , $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$ y de los productos:

$$T_1 * T_2 = \begin{pmatrix} a * a & a * b & b * a & b * b \\ 0 & a * c & 0 & b * c \\ 0 & 0 & c * a & c * b \\ 0 & 0 & 0 & c * c \end{pmatrix}$$

$$T_2 * T_1 = \begin{pmatrix} a * a & b * a & a * b & b * b \\ 0 & c * a & 0 & c * b \\ 0 & 0 & a * c & b * c \\ 0 & 0 & 0 & c * c \end{pmatrix}$$

los generadores del álgebra \mathcal{A}_R satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} a * b - b * a &= h(a * a - a * c) \\ a * c &= c * a \\ b * c - c * b &= h(c * a - c * c). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Esas relaciones muestran la no conmutatividad entre los elementos de \mathcal{A}_R respecto del producto $*$. Observamos además que en el límite clásico, cuando $h \rightarrow 0$, el producto $*$ coincide con m , por lo tanto, también coinciden las estructuras de \mathcal{A} y \mathcal{A}_R .

Los morfismos Δ y ε definidos sobre \mathcal{A} inducen una estructura de co-álgebra sobre \mathcal{A}_R . En efecto,

$$\Delta : \mathcal{A}_R \rightarrow \mathcal{A}_R \otimes \mathcal{A}_R, \quad \Delta(T) = T \otimes T$$

definido por

$$\Delta(T) = \begin{pmatrix} \Delta(a) & \Delta(b) \\ 0 & \Delta(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes a & a \otimes b + b \otimes c \\ 0 & c \otimes c \end{pmatrix}$$

satisface las tres igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta(a) * \Delta(b) - \Delta(b) * \Delta(a) &= h(\Delta(a) * \Delta(a) - \Delta(a) * \Delta(b)) \\ \Delta(b) * \Delta(c) - \Delta(c) * \Delta(b) &= h(\Delta(c) * \Delta(a) - \Delta(c) * \Delta(c)) \\ \Delta(a) * \Delta(c) &= \Delta(c) * \Delta(a) \end{aligned} \quad (1.16)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta(a) * \Delta(b) - \Delta(b) * \Delta(a) &= \\ &= (a \otimes a) * (a \otimes b + b \otimes c) - (a \otimes b + b \otimes c) * (a \otimes a) \\ &= (a * a) \otimes (a * b - b * a) + (a * b - b * a) \otimes (c * a) \\ &= (a * a) \otimes (h(a * a - a * c)) + h(a * a - a * c) \otimes (c * a) \\ &= h((a * a) \otimes (a * a) - (a * c) \otimes (a * c)) \\ &= h(\Delta(a) * \Delta(a) - \Delta(a) * \Delta(c)). \end{aligned}$$

De la misma forma se verifican fácilmente las otras igualdades en (1.16). Esas propiedades nos afirman que $\Delta(a), \Delta(b), \Delta(c)$ son elementos de \mathcal{A}_R y por lo tanto Δ es un morfismo de álgebras. También ε definido por $\varepsilon : \mathcal{A}_R \rightarrow k$ con $\varepsilon(a) = \varepsilon(c) = 1$, $\varepsilon(b) = 0$ es un morfismo de álgebras. Por ser el co-producto Δ no co-conmutativo se tiene que el espacio \mathcal{A}_R es una biálgebra no conmutativa y no co-conmutativa.

Puesto que $a * c$ es un elemento como grupo (ver [5]) de \mathcal{A}_R , es decir, $a * c$ satisface la igualdad

$$\Delta(a * c) = (a * c) \otimes (a * c)$$

podemos definir el determinante cuántico asociado a la matriz R como, (ver [13]) $\det_R T = a * c$.

Proposición 1.4. *El $\det_R T = a * c$ está en el centro del álgebra \mathcal{A}_R .*

Prueba. En efecto, $\det_R T$ conmuta con todos los elementos del álgebra \mathcal{A}_R . Basta probar esta propiedad sobre los generadores así:

$$\begin{aligned} (\det_R T) * a &= (a * c) * a = a * (c * a) = a * (a * c) = a * (\det_R T) \\ (\det_R T) * b &= (a * c) * b = (c * a) * b = c * (a * b) = c * (b * a + h(a * a - a * c)) \\ &= (c * b + h(c * a - c * c)) * a = (b * c) * a = b * (c * a) \\ &= b * (\det_R T) \\ (\det_R T) * c &= (a * c) * c = a * (c * c) = (a * c) * c = (c * a) * c = c * (\det_R T). \end{aligned}$$

Proposición 1.5. *El álgebra cociente*

$$ST_R(2) = \mathcal{A}_R / \det_R T - 1$$

es un álgebra de Hopf, (ver [16] o [17]), con el co-producto Δ , la co-unidad ε y la aplicación antípoda S definidas sobre los generadores por

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a, & \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes c, & \Delta(c) &= c \otimes c \\ \varepsilon(a) &= \varepsilon(c) = 1, & \varepsilon(b) &= 0, \\ S(a) &= c, & S(b) &= -b - h(a - c), & S(c) &= a. \end{aligned}$$

Prueba. Por la proposición (1.3) sabemos que \mathcal{A}_R es una biálgebra con el co-producto Δ y la co-unidad ε , luego el álgebra cociente $ST_R(2)$ es una biálgebra si se satisface que Δ y ε están bien definidas sobre el cociente. Pero esta propiedad se tiene por la definición del determinante cuántico y por la linealidad de las operaciones. En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta(\det_R T - 1) &= (\det_R T) \otimes (\det_R T) - 1 \otimes 1 = 0, \\ \varepsilon(\det_R T - 1) &= \varepsilon(\det_R T) - \varepsilon(1) = 0. \end{aligned}$$

Para completar la demostración de la proposición basta ver que S es la aplicación antípoda, es decir, probar que S satisface las siguientes propiedades:

- (1) $T * S(T) = S(T) * T = I$,
- (2) $S(t_j^i * t_l^k) = S(t_l^k) * S(t_j^i)$,
- (3) $*(\Delta S) = *(\sigma(S \otimes S)\Delta)$
- (4) $S(\det_R T - 1) = 0$,

con $*$ el producto no conmutativo definido sobre $ST_R(2)$.

Puesto que podemos expresar a S como la matriz,

$$S(T) = \begin{pmatrix} c & -b - h(a - c) \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

(1) se obtiene directamente de (1.15). Para ver (2) primero probamos que los elementos $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ pertenecen al álgebra $ST_R(2)$, es decir debemos probar que esos elementos satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} S(a) * S(b) - S(b) * S(a) &= h(S(a) * S(a) - S(a) * S(c)), \\ S(a) * S(c) &= S(c) * S(a), \\ S(b) * S(c) - S(c) * S(b) &= h(S(c) * S(a) - S(c) * S(c)). \end{aligned} \tag{1.17}$$

En efecto, desarrollando los dos términos de la primera igualdad en (1.17) resulta:

$$\begin{aligned} S(a) * S(b) - S(b) * S(a) &= c * (-b - h(a - c)) - (-b - h(a - c)) * c \\ &= b * c - c * b, \end{aligned}$$

$$h(S(a) * S(a) - S(a) * S(c)) = h(c * c - c * a) = b * c - c * b$$

y la igualdad se satisface. Las otras relaciones en (1.17) para $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ se verifican de la misma forma. Por ser S un antimorfismo sobre \mathcal{A} y por las igualdades (1.17) resulta fácil probar que S es un anti-morfismo sobre $ST_R(2)$. En efecto, S satisface las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} S(a * c) &= 1 = S(c) * S(a) = a * c = 1, \\ S(a * b) &= S(b * a + h(a * a - a * c)) = S(b * a) + h(S(a * a) - S(a * c)) \\ &= S(a) * S(b) + h(S(a) * S(a) - S(c) * S(a)), \\ S(b) * S(a) &= S(a) * S(b) + h(S(a) * S(a) - S(c) * S(a)), \\ S(b * c) &= S(c * b + h(c * a - c * c)) = S(c * b) + hS(c * a - c * c) \\ &= S(b) * S(c) + h(S(a) * S(c) - S(c) * S(c)), \\ S(c) * S(b) &= S(b) * S(c) + h(S(a) * S(c) - S(c) * S(c)). \end{aligned}$$

La propiedad (3) se satisface directamente sobre a y c por la definición de S . Para b la igualdad (3) se obtiene de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta(S(b)) &= \Delta(-b - h(a - c)) = -[\Delta(b) + h(\Delta(a) - \Delta(c))] \\ &= -(a \otimes b + b \otimes c + h(a \otimes a - c \otimes c)), \\ \sigma(S \otimes S)\Delta(b) &= \sigma(S \otimes S)(a \otimes b + b \otimes c) \\ &= \sigma(S(a) \otimes S(b) + S(b) \otimes S(c)) \\ &= \sigma(c \otimes (-b - h(a - c)) + (-b - h(a - c)) \otimes a) \\ &= -(b \otimes c + a \otimes b + h(a \otimes a - c \otimes c)). \end{aligned}$$

y por último (4) se obtiene directamente. Luego S es la aplicación antípoda sobre $ST_R(2)$ y S , Δ y ε determinan la estructura de álgebra de Hopf sobre la biálgebra $ST_R(2)$.

Definición 1.6. El álgebra de Hopf $ST_R(2)$ se llama el grupo cuántico del grupo triangular $ST(2)$

Puesto que la matriz R depende del parámetro h (constante de Plank en física) con $q = e^h$, las condiciones y propiedades sobre $ST_R(2)$ las podemos expresar en términos del parámetro q y en ese caso el grupo cuántico $ST_R(2)$ lo notamos $ST_q(2)$.

2. Estructura diferencial sobre el grupo $ST_q(2)$

Sobre el grupo cuántico $ST_R(2)$ definido en (1.6) construimos un cálculo diferencial no conmutativo, (ver [12] y [18]). Es decir, construimos un álgebra de Hopf graduada no conmutativa (\mathcal{M}_h, d) con d una aplicación diferencial que satisface la regla de Leibniz y la relación de nilpotencia.

En primera instancia consideramos el álgebra graduada (\mathcal{M}_h, d) generada por las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$ y sus diferenciales. En seguida determinamos un cálculo diferencial no conmutativo de primer orden (\mathcal{M}_h, d) en términos de las 1-formas invariantes a izquierda del grupo $ST(2)$. En ambos casos definimos la estructura de Lie-Poisson, (ver [6], [14] o [15]) sobre el álgebra graduada (\mathcal{M}_h, d) .

Definición 2.1. Sea \mathcal{A}_q el álgebra de funciones sobre un grupo cuántico G_q . Un cálculo diferencial de primer orden sobre G_q es un álgebra de Hopf graduada (\mathcal{M}, d) con d una transformación diferencial que satisface:

$$d^2 = 0, \quad d(ab) = da \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot db, \quad M^0 = \mathcal{A}_q, \quad |a| = \text{grad}(a)$$

En (1.6) definimos el grupo cuántico $ST_R(2)$ como el álgebra de Hopf no conmutativa generada por las funciones coordenadas (t_j^i) del grupo $ST(2)$ sujetas a la condición

$$RT_1T_2 = T_2T_1R$$

donde R es la matriz (1.14), T es la matriz de las funciones coordenadas, $T_1 = T \otimes I$ y $T_2 = I \otimes T$. Entonces para definir un cálculo diferencial de primer orden sobre $ST_R(2)$ construimos el espacio \mathcal{M}_h generado por las funciones coordenadas t_j^i y sus diferenciales $d(t_j^i)$, y encontramos lo siguiente.

Proposición 2.1. *El espacio \mathcal{M}_h generado por las entradas de las matrices T y dT módulo las relaciones:*

$$RT_1T_2 = T_2T_1R \tag{2.1}$$

$$RT_2(dT)_1 = \pm(dT)_1T_2R \tag{2.2}$$

$$RT_1(dT)_2 = \pm(dT)_2T_1R^{-1} \tag{2.3}$$

$$R(dT)_1(dT)_2 = \mp(dT)_2(dT)_1R^{-1} \tag{2.4}$$

es un álgebra de Hopf graduada, (ver [21] y [22]).

Prueba. Los elementos de la matriz $T = ((t_j^i))$ módulo la relación (2.1) generan el álgebra de Hopf $ST_R(2)$. Las diferenciales de (2.1) satisfacen las siguientes

igualdades:

$$\begin{aligned}
a \cdot da &= da \cdot a & c \cdot da &= da \cdot c \\
a \cdot dc &= dc \cdot a & c \cdot dc &= dc \cdot c \\
b \cdot da - da \cdot b &= \pm h(da \cdot a - c \cdot da) \\
a \cdot db - db \cdot a &= \pm h(a \cdot dc - da \cdot a) \\
c \cdot db - db \cdot c &= \pm h(da \cdot c - c \cdot dc) \\
b \cdot dc - dc \cdot b &= \pm h(c \cdot dc - dc \cdot a)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

En términos de las matrices:

$$T_1 = T \otimes I, \quad T_2 = I \otimes T, \quad (dT)_1 = dT \otimes I, \quad (dT)_2 = I \otimes dT,$$

las igualdades (2.5) se pueden expresar en forma matricial por (2.2) y (2.3), y viceversa, al desarrollar las matrices (2.2) a (2.3) encontramos las expresiones (2.5). Además, las diferenciales de (2.2) y de (2.3) se pueden escribir en forma matricial por (2.4).

Entonces definimos el álgebra \mathcal{M}_h como el espacio generado por las entradas de las matrices T y dT módulo las relaciones (2.1) a (2.4). El álgebra \mathcal{M}_h así construida tiene una graduación natural definida por

$$\text{grad}(t_j^i) = |t_j^i| = 0, \quad \text{grad}(dt_j^i) = |dt_j^i| = 1 \tag{2.6}$$

e induce la estructura de álgebra graduada sobre el espacio $\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$ con el producto tensorial

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

y la diferencial

$$d(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db. \tag{2.7}$$

El álgebra graduada $\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$ nos permite construir la estructura de álgebra de Hopf sobre el espacio \mathcal{M}_h . Para ello definimos las aplicaciones Δ , ε y S sobre los generadores

$$a = t_{11}, \quad b = t_{12}, \quad c = t_{22}, \quad da = dt_{11}, \quad db = dt_{12}, \quad dc = dt_{22}$$

del álgebra \mathcal{M}_h , por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
\Delta(a) &= a \otimes a \\
\Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes c \\
\Delta(c) &= c \otimes c \\
\Delta(da) &= da \otimes a + a \otimes da \\
\Delta(db) &= da \otimes b + db \otimes c + a \otimes db + b \otimes dc \\
\Delta(dc) &= dc \otimes c + c \otimes dc
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(a) &= 1, & \varepsilon(b) &= 0, & \varepsilon(c) &= 1, \\ \varepsilon(da) &= 0, & \varepsilon(db) &= 0, & \varepsilon(dc) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} S(a) &= c & S(da) &= d(S(a)) = dc \\ S(b) &= -b - h(a - c) & S(db) &= d(S(b)) = -db - h(da - dc) \\ S(c) &= a & S(dc) &= d(S(c)) = da \end{aligned} \quad (2.10)$$

que en forma matricial podemos expresar por las igualdades:

$$\begin{aligned} \Delta(T) &= T \otimes T & \Delta(dT) &= dT \otimes T + T \otimes dT \\ \varepsilon(T) &= I & \varepsilon(dT) &= 0 \\ S(T) &= T^{-1} & S(dT) &= d(S(T)) \end{aligned}$$

Δ , ε y S definen respectivamente el co-producto, la co-unidad y la antípoda sobre \mathcal{M}_h y determinan la estructura de álgebra de Hopf graduada sobre este espacio, (ver [24] y [25]). Para probar esta afirmación basta ver que Δ y ε son morfismos de álgebras graduadas y que S es un anti-morfismo y satisface las propiedades de antípoda.

Sea Δ el co-producto del álgebra de Hopf $ST_R(2)$ (proposición 1.4). Veamos que la aplicación Δ definida en (2.8) es una extensión del co-producto (1.3) sobre el espacio \mathcal{M}_h

$$\Delta : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h.$$

En efecto, dadas las aplicaciones lineales

$$\Delta_L : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$$

$$\Delta_R : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$$

(co-producto a izquierda y co-producto a derecha respectivamente), definidas por las igualdades

$$\begin{aligned} \Delta_L(TdT) &= \Delta(T)(id \otimes d)(\Delta(T)), \\ \Delta_R(TdT) &= \Delta(T)(d \otimes id)(\Delta(T)), \end{aligned}$$

definimos

$$\Delta(TdT) = \Delta_L(TdT) + \Delta_R(TdT)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta(TdT) &= \Delta_L(TdT) + \Delta_R(TdT) \\ &= (T \otimes T)(id \otimes d)(T \otimes T) + (T \otimes T)(d \otimes id)(T \otimes T) \\ &= (T \otimes T)(dT \otimes T + T \otimes dT) \\ &= \Delta(T)\Delta(dT), \end{aligned}$$

y

$$d(\Delta(T)) = d(T \otimes T) = dT \otimes T + T \otimes dT = \Delta(dT).$$

Luego Δ es un morfismo de álgebras graduadas. Por la definición (2.9) y por ser ε una extensión de la co-unidad (1.4) es inmediato que ε es la co-unidad sobre el álgebra graduada (\mathcal{M}_h, d) .

Queda por demostrar que la aplicación S definida en (2.10) es la antípoda del álgebra graduada (\mathcal{M}_h, d) . Por la proposición (1.4) sabemos que los elementos $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ satisfacen (2.1), luego sus diferenciales

$$d(S(a)) = dc, \quad d(S(b)) = -db - h(da - dc), \quad d(S(c)) = da$$

satisfacen las relaciones (2.2) y (2.3), es decir, los elementos

$$S(a), \quad S(b), \quad S(c), \quad d(S(a)), \quad d(S(b)), \quad d(S(c))$$

son elementos del álgebra graduada \mathcal{M}_h y por lo tanto S es un antimorfismo sobre el álgebra graduada \mathcal{M}_h . Además, S satisface las siguientes identidades:

- (i) $\mu(S \otimes id)\Delta = \mu(id \otimes S)\Delta = \eta\varepsilon$.
- (ii) $\Delta S = \sigma(S \otimes S)\Delta$.
- (iii) $\varepsilon S = \varepsilon$.

En efecto, (i) se deduce de los siguientes resultados:

$$\mu(S \otimes id)\Delta(T) = \mu(S \otimes id)(T \otimes T) = \mu(T^{-1} \otimes T) = I.$$

$$\mu(id \otimes S)\Delta(T) = \mu(id \otimes S)(T \otimes T) = \mu(T \otimes T^{-1}) = I.$$

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(dT) &= \mu(S \otimes id)(dT \otimes T + T \otimes dT) \\ &= \mu(dT^{-1} \otimes T + T^{-1} \otimes dT) \\ &= \mu(-T^{-1}dT T^{-1} \otimes T + T^{-1} \otimes dT) \\ &= -T^{-1}dT + T^{-1}dT = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(dT) &= \mu(id \otimes S)(dT \otimes T + T \otimes dT) \\ &= \mu(dT \otimes T^{-1} + T \otimes dT^{-1}) \\ &= \mu(dT \otimes T^{-1} - T \otimes T^{-1}dT T^{-1}) \\ &= -dT T^{-1} + dT T^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Por la proposición (1.4), la propiedad (ii) se satisface sobre T . Para los elementos de dT , (ii) se obtiene de las dos expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \Delta S(dT) &= \Delta(dT^{-1}) = \Delta(-T^{-1}dT T^{-1}) \\
 &= -\Delta(T^{-1})\Delta(dT)\Delta(T^{-1}) \\
 &= -(T^{-1} \otimes T^{-1})(dT \otimes T + T \otimes dT)(T^{-1} \otimes T^{-1}) \\
 &= -T^{-1}dT T^{-1} \otimes T^{-1}T T^{-1} - T^{-1}T T^{-1} \otimes T^{-1}dT T^{-1} \\
 &= -dT^{-1} \otimes T^{-1} - T^{-1} \otimes dT^{-1}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \sigma(S \otimes S)\Delta(dT) &= \sigma(S \otimes S)(dT \otimes T + T \otimes dT) \\
 &= \sigma(dT^{-1} \otimes T^{-1} + T^{-1} \otimes dT^{-1}) \\
 &= T^{-1} \otimes dT^{-1} + dT^{-1} \otimes T^{-1} \\
 &= -T^{-1} \otimes T^{-1}dT T^{-1} - T^{-1}dT T^{-1} \otimes T^{-1} \\
 &= -T^{-1} \otimes dT^{-1} - dT^{-1} \otimes T^{-1}.
 \end{aligned}$$

Por último, la propiedad (iii) se satisface directamente de las definiciones (2.9) y (2.10). Además, las propiedades (i) a (iii) se satisfacen para el co-producto a izquierda Δ_L y el co-producto a derecha Δ_R , luego se satisfacen también para elementos de la forma TdT .

Con estas propiedades S es una aplicación antípoda sobre \mathcal{M}_h y así completamos la prueba de la proposición (2.1).

Definición 2.2. El álgebra de Hopf graduada $(\mathcal{M}_h, d, \Delta, \varepsilon, S)$ de la proposición anterior es el cálculo diferencial bicovariante sobre el grupo cuántico $ST_R(2)$.

La bicovariancia del cálculo está dada por los signos (\pm) de las relaciones (2.2) a (2.4) que satisfacen los generadores del álgebra graduada \mathcal{M}_h .

El cálculo diferencial de primer orden sobre el grupo cuántico $ST_R(2)$ también lo podemos definir como el álgebra generada por las uno formas diferenciales sobre el grupo.

Dado el grupo de Lie $ST(2)$ generado por las entradas t_j^i de la matriz T las 1-formas de Maurer Cartan (ver [30]), invariantes a izquierda están definidas por, (ver [30]),

$$\omega_j^i = (T^{-1})_k^i (dT)_k^j.$$

Los elementos de la matriz de traza nula $\Omega = (\omega_j^i)$ generan el espacio Ω de las 1-formas invariantes a izquierda y son una base del espacio de formas diferenciales de primer orden sobre el grupo $ST(2)$. Entonces Ω es un bimódulo de formas diferenciales de primer orden sobre \mathcal{A} .

Si Ω es una representación del espacio de 1-formas diferenciales sobre el grupo $ST(2)$ que satisfacen

$$dT = T\Omega, \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega$$

por ser Ω un bimódulo bicovariante sobre el espacio de funciones $C^\infty(ST(2))$, podemos definir el álgebra graduada diferencial \mathcal{M}_h como el álgebra generada por los elementos t_j^i de T y por las 1-formas invariantes a izquierda w_j^i de Ω , con ciertas relaciones entre ellos, con las cuales \mathcal{M}_h tiene estructura de álgebra de Hopf graduada.

Proposición 2.2. *En términos de las 1-formas invariantes a izquierda $\Omega = (\omega_j^i)$ las relaciones (2.2), (2.3) y (2.4) de la proposición (2.1) toman la forma*

$$T_1 R \Omega_2 = \Omega_2 T_1 R^{-1} \quad (2.11)$$

$$T_2 R \Omega_1 = \pm \Omega_1 T_2 R \quad (2.12)$$

$$R \Omega_1 R^{-1} \Omega_2 = \mp \Omega_2 R \Omega_1 R^{-1} \quad (2.13)$$

respectivamente, donde

$$\begin{aligned} \Omega &= T^{-1} dT, & \text{tr}_z(\Omega) &= 0, \\ \Omega_1 &= \Omega \otimes I, & \Omega_2 &= I \otimes \Omega. \end{aligned}$$

Prueba. En efecto, puesto que $T\Omega = dT$

$$T_1 \Omega_1 = dT_1 = (dT)_1, \quad T_2 \Omega_2 = dT_2 = (dT)_2$$

con

$$\Omega_1 = \Omega \otimes I, \quad \Omega_2 = I \otimes \Omega.$$

Entonces partiendo de (2.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} RT_1 T_2 &= T_2 T_1 R \\ RT_1 T_2 \Omega_2 &= T_2 T_1 R \Omega_2 \\ RT_1 dT_2 &= T_2 T_1 R \Omega_2 \\ dT_2 T_1 R^{-1} &= T_2 T_1 R \Omega_2 \\ T_2 \Omega_2 T_1 R^{-1} &= T_2 T_1 R \Omega_2 \\ \Omega_2 T_1 R^{-1} &= T_1 R \Omega_2. \end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene (2.12) partiendo de (2.2). Para probar (2.13) tomamos la igualdad (2.4) y usando las igualdades anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 RdT_1dT_2 &= \mp dT_2dT_1R^{-1} \\
 RdT_1T_2\Omega_2 &= \mp dT_2T_1\Omega_1R^{-1} \\
 R^2T_2dT_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp RT_1dT_2R\Omega_1R^{-1} \\
 RT_2T_1\Omega_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp T_1T_2\Omega_2R\Omega_1R^{-1} \\
 T_1T_2R\Omega_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp T_1T_2\Omega_2T_1\Omega_1R \\
 R\Omega_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp \Omega_2R\Omega_1R^{-1} \\
 R\Omega_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp \Omega_2R\Omega_1R^{-1}.
 \end{aligned}$$

Proposición 2.3. *El álgebra \mathcal{M}_h generada por los elementos T (con $\det(T) = 1$) y Ω (con $\text{tr}_z(\Omega) = 0$) que satisfacen las relaciones (2.1), (2.11), (2.12) y (2.13) es un álgebra de Hopf graduada diferencial con el co-producto Δ , la co-unidad ε y la aplicación antípoda siguientes:*

$$\begin{aligned}
 \Delta(T) &= T \otimes T, & \Delta(\Omega) &= \Omega \otimes I + (T \otimes \Omega)(S(T) \otimes I), \\
 \varepsilon(T) &= I, & \varepsilon(\Omega) &= 0, \\
 S(T) &= T^{-1}, & S(\Omega) &= -S(T)\Omega T.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Prueba. Puesto que las 1-formas de Maurer-Cartan invariantes a izquierda ω_j^i se pueden expresar en terminos de los generadores $a = t_{11}, b = t_{12}, c = t_{22}$ y sus diferenciales por

$$w_0 = c da, \quad w_1 = c db - b dc, \quad w_2 = a dc,$$

o también por

$$da = aw_0, \quad db = aw_1 + bw_2, \quad dc = cw_2,$$

entonces los elementos de las igualdades (2.11) a (2.13) pueden expresarse como suma de productos $t_j^i dt_l^k$, y con ellos el co-producto Δ , la co-unidad ε y la aplicación antípoda en (2.14) satisfacen (2.8) a (2.10) y por lo tanto, la validez de esta proposición se obtiene de la validez de las proposiciones (2.1) y (2.2).

Dada el álgebra de Hopf graduada \mathcal{M}_h generada por los elementos de las matrices T y dT módulo las relaciones (2.11) a (2.13), queremos definir un corchete de Lie sobre \mathcal{M}_h de tal forma que con ese corchete \mathcal{M}_h tenga estructura de Lie-Poisson. Esto es, (ver [24]) definir un corchete:

$$\{ \} : \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{M}_h$$

que satisfaga las siguientes propiedades:

(1) Simetría graduada:

$$\{a, b\} = (-1)^{|a||b|+1}\{b, a\} \quad (2.15)$$

(2) Regla de Leibniz graduada:

$$\{ab, c\} = a\{b, c\} + (-1)^{|b||c|}\{a, b\}b \quad (2.16)$$

(3) Identidad de Jacobi graduada:

$$(-1)^{|a||c|}\{\{a, b\}, c\} + (-1)^{|b||c|}\{\{c, a\}, b\} + (-1)^{|a||b|}\{\{b, c\}, a\} = 0 \quad (2.17)$$

y que sea compatible con el producto en \mathcal{M}_h , es decir que satisfaga

$$\Delta(\{a, b\}) = \{\Delta(a), \Delta(b)\}_{\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h}$$

donde $\{, \}_{\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h}$ es el corchete inducido por el corchete de Lie de \mathcal{M}_h sobre $\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$ y definido por

$$\{a \otimes b, c \otimes d\} = (-1)^{|b||c|}\{a, c\} \otimes bd + (-1)^{|b||c|}ac \otimes \{b, d\}$$

donde a, b, c, d son elementos de \mathcal{M}_h .

Nota 1. En la definición del corchete sobre \mathcal{M}_h debemos tener presente que en el límite clásico ($h \rightarrow 0$), el corchete de Poisson $\{, \}$ de \mathcal{M}_h debe coincidir con el corchete definido sobre el álgebra graduada generada por los elementos conmutativos de T y sus diferenciales dT dado por:

$$\begin{aligned} \{T \otimes T\} &= [r, T \otimes T], \\ \{T_1, dT_2\} + \{dT_1, T_2\} &= [r, d(T_1T_2)] = d[r, T_1T_2] \end{aligned}$$

donde $T \otimes T = (T \otimes I)(I \otimes T) = T_1T_2$ y $\{T \otimes T\}$ es el corchete de Sklyanin (61) (ver [7]), generado por la r -matriz (55) y d es el operador diferencial graduado definido por:

$$d(T) = T\Omega, \quad d(\Omega) = \Omega \wedge \Omega.$$

Definición 2.3. Una estructura de Poisson graduada se dice que es diferencial si el operador d satisface la regla de Leibniz para el corchete:

$$d\{a, b\} = \{da, b\} + (-1)^{|a|}\{a, db\}.$$

Nota 2. Si la estructura Lie-Poisson graduada definida sobre \mathcal{M}_h es diferencial, el álgebra no conmutativa de formas diferenciales \mathcal{M}_h admite una derivada exterior, (ver [29]).

Sabemos que el álgebra de funciones $C^\infty(ST(2))$ tiene estructura de Poisson, (ver [10]), con el corchete $\{T \otimes T\} = [r, T \otimes T]$ definido por la r -matriz (1.5). Este corchete induce el corchete de Lie sobre el álgebra graduada \mathcal{M}_h como sigue:

$$\begin{aligned} \{T_1, T_2\} &= [r, T_1 T_2] = r(T_1 T_2) - (T_1 T_2)r \\ \{T_1, dT_2\} &= [r, T_1 dT_2] = r(T_1 dT_2) - (T_1 dT_2)r \\ \{dT_1, T_2\} &= [r, dT_1 T_2] = r(dT_1 T_2) - (dT_1 T_2)r \\ \{T_1, dT_2\} + \{dT_1, T_2\} &= [r, d(T_1 T_2)] = d[r, T_1 T_2] \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde T_1 , T_2 , dT_1 y dT_2 son las matrices definidas en la proposición (2.1).

Proposición 2.4. *El cálculo diferencial de primer orden $(\mathcal{M}_h, d, \Delta, \varepsilon, S)$ tiene estructura de Hopf-Poisson graduada diferencial con el corchete (2.18).*

Prueba. Debemos ver que el corchete (2.18) es un corchete de Poisson y que el álgebra de Poisson $(\mathcal{M}_h, \{, \})$ es una estructura diferencial, es decir, el espacio $(\mathcal{M}_h, \{, \})$ satisface la definición (2.3).

Dadas las matrices T en (1.2), r en (1.5) y los corchetes

$$\begin{aligned} \{T_1, dT_2\} &= \begin{pmatrix} \{a, da\} & \{a, db\} & \{b, da\} & \{b, db\} \\ 0 & \{a, dc\} & 0 & \{b, dc\} \\ 0 & 0 & \{c, da\} & \{c, db\} \\ 0 & 0 & 0 & \{c, dc\} \end{pmatrix}, \\ \{dT_1, T_2\} &= \begin{pmatrix} \{da, a\} & \{da, b\} & \{db, a\} & \{db, b\} \\ 0 & \{da, c\} & \{0, 0\} & \{db, c\} \\ 0 & 0 & \{dc, a\} & \{dc, b\} \\ 0 & 0 & 0 & \{dc, c\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y los productos

$$T_1 dT_2 = \begin{pmatrix} a da & a db & b da & b db \\ 0 & adc & 0 & bdc \\ 0 & 0 & c da & c db \\ 0 & 0 & 0 & cdc \end{pmatrix}, \quad dT_1 T_2 = \begin{pmatrix} da a & da b & db a & db b \\ 0 & da c & 0 & db c \\ 0 & 0 & dc a & dc b \\ 0 & 0 & 0 & dc c \end{pmatrix}$$

se tiene que los corchetes (2.18) se pueden expresar por las igualdades si-

guientes, definidas sobre los generadores del álgebra graduada \mathcal{M}_h :

$$\begin{aligned}
\{a, a\} &= \{b, b\} = \{c, c\} = 0, \\
\{a, b\} &= -\{b, a\} = a^2 - ac, \\
\{a, c\} &= \{c, a\} = 0, \\
\{b, c\} &= -\{c, b\} = ac - c^2, \\
\{a, da\} &= 0, & \{a, dc\} &= 0, \\
\{c, da\} &= 0, & \{c, dc\} &= 0, \\
\{a, db\} &= a(dc - da), & \{b, da\} &= (a - c) da, \\
\{b, db\} &= bdc - cdb + bda - adb, \\
\{b, dc\} &= (c - a)dc, & \{c, db\} &= -c(dc - da), \\
\{da, a\} &= 0, & \{da, c\} &= 0, \\
\{dc, a\} &= 0, & \{dc, c\} &= 0, \\
\{da, b\} &= da(c - a), & \{db, a\} &= (da - dc)a, \\
\{db, b\} &= dbc - dc b + dba - dab, \\
\{db, c\} &= (dc - da)c, & \{dc, b\} &= -dc(c - a)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde los generadores del álgebra $\{a, b, c, da, db, dc\}$ satisfacen las relaciones (2.11) a (2.13) de la proposición (2.1).

El corchete (2.19) satisface las propiedades del corchete de Lie graduado (2.15) a (2.17). En efecto, la antisimetría graduada (2.15) se satisface directamente. Veamos el caso

$$\{a, db\} = a(dc - da) = (-1)^{|a||b|+1} \{db, a\} = (da - dc)a;$$

los otros casos se verifican de la misma forma. La regla de Leibniz (2.16) se obtiene también en forma directa hallando las diferenciales de los corchetes y comparando en las igualdades (2.19).

Como ejemplo veamos un caso.

$$\begin{aligned}
\{da, b\} + \{a, db\} &= da(c - a) + a(dc - da) \\
d\{a, b\} &= -d(a^2 - ac) = -d(a^2) - d(ac) \\
&= -da \cdot a - (-1)^{|a|} a \cdot da + da \cdot c + (-1)^{|a|} a \cdot dc \\
&= da \cdot (c - a) + a \cdot (dc - da)
\end{aligned}$$

luego,

$$d\{a, b\} = \{da, b\} + (-1)^{|a|} \{a, db\}$$

y esta propiedad se satisface para todo elemento del álgebra graduada \mathcal{M}_h . Entonces el corchete definido en (2.19) es un corchete de Lie graduado sobre el álgebra de Hopf \mathcal{M}_h .

Para probar que el corchete (2.19) es de Poisson basta verificar que el co-producto

$$\begin{aligned}\Delta : \mathcal{M}_h &\rightarrow \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h \\ \Delta &= \Delta_L + \Delta_R\end{aligned}$$

es una aplicación de Poisson. Sabemos que Δ es una aplicación de Poisson sobre los elementos de T , (ver [10]). Por lo tanto, Δ_L y Δ_R son aplicaciones de Poisson sobre el álgebra graduada generada por T y dT . Luego $\Delta = \Delta_L + \Delta_R$ es una aplicación de Poisson sobre el álgebra graduada \mathcal{M}_h ; es decir, el corchete

$$\{ , \} : \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{M}_h$$

definido en (2.18) es compatible con el producto en \mathcal{M}_h .

Con esta afirmación queda demostrado que el álgebra $(\mathcal{M}_h, d, \Delta, \varepsilon, S, \{, \})$ es un álgebra de Hopf-Poisson graduada. Es decir, el cálculo diferencial de primer orden del grupo cuántico $ST_R(2)$ es un álgebra de Hopf-Poisson graduada con el corchete (2.18) y tiene estructura de Poisson diferencial.

Por la proposición (2.4) y la nota [2] existe una única diferencial

$$d : \mathcal{M}_h^k \rightarrow \mathcal{M}_h^{k+1}$$

tal que

$$d^2 = 0, \quad d(w_j^i) = dw_j^i, \quad d(t_j^i) = dt_j^i, \quad d(w \cdot \eta) = dw \cdot \eta + (-1)^{|w|} w \cdot d\eta$$

para w, η elementos homogéneos y $|w|$ el grado de w .

Completamos así la construcción de un cálculo diferencial sobre el grupo cuántico $ST_R(2)$ con una estructura Lie-Poisson diferencial y una derivada exterior.

Bibliografía

- [1] P. Aschieri and L. Castellani, *An introduction to non-commutative differential geometry on Quantum Groups*, CERN TH 6565/92, Torino 1992, pp. 1-44.
- [2] G. E. Arutyunov and P.B. Medvedev, *Quantization of the external algebra on a Poisson-Lie Group*, hep-th/9311096, Nov. 1993, pp. 1-20.
- [3] I. Ya Aref'eva, G.E. Arutyunov and P.B. Medvedev, *Poisson-Lie structures on the external algebra of $SL(2)$ and their quantization*, hep-th/9401127, 1994, pp. 2-18.
- [4] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Institut des Hautes Studes Scientifiques, Grenoble. Extrait des Publications Mathematiques **62** (1986), 257-358.
- [5] V. Chari and A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University, Cambridge University Press, 1994.

- [6] V. Drinfeld, *Quantum Groups*, ICM-86, 1 (1986), 798–820, Academic Press.
- [7] H. D. Doebner, J. D. Hennig and W. Lücke, *Quantum Groups, Proceeding*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Physics 370, 1990.
- [8] P. Etingof and David Kazhdan, *Quantization of Poisson Algebraic groups and Poisson Homogeneous spaces*, q-alg 9510020 (1995), 1–9.
- [9] L. D. Faddeev and P. N Pyatov, *The differential calculus on Quantum Linear Groups*, hep-th/9402070=20 (1994), 0–14.
- [10] B. Guerrero, *Una cuantización del grupo triangular $ST(2)$* , preprint, Universidad Nacional de Colombia.
- [11] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symetric spaces*, Academic Press, Inc, San Diego California, 1978.
- [12] B. Jurčo, *Differential Calculus on Quantum Groups: Constructive procedure*, CERN - TH - 7417 / 94 (1994), 1–10, CERN, theory division, CH-1211 Geneve 23.
- [13] C. Kassel, *Groupes Quantiques*, Math IRMA, Strasbourg, 1992.
- [14] J. H Lu and A. Weinstein, *Poisson Lie Groups, Dressing Transformations, and Bruhat decompositions*, J. Differential Geometry **31** (1990), 501–526.
- [15] L. A. Takhtajan, *Quantum Groups and Integrable Models*, Advaced Studies in Pure Mathematics **19** (1990), 435–457.
- [16] L. A. Takhtajan, *Introduction to Quantum Groups*, Lecture Notes in Physics **370** (1990), 3–28, Springer-Verlag.
- [17] L. A. Takhtajan, *Lectures on Integrable Systems. Elementary course on Quantum Groups*, World Scientific Proceedings of the CIMPA School, 1991, pp. 319–348.
- [18] Boris Tsygan, *Notes on differential forms on quantum groups*, Pennsylvania State University USA (1993), 1–37.
- [19] N. Yu Reshetikhin, L. Takhtajan and Faddeev, *Quantization of Lie Groups and Lie Algebras*, Algebra and Analysis (1989), 178–206.
- [20] M. A. Semenov-Tian-Shnsky, *Lectures on R-matrices, Poisson-Lie Groups and Integrable Systems*, Lectures on Integrable Systems World Scientific Proceedings of the CIMPA School 1991 Nice-France (1994), 269–318.
- [21] B. Tsygan, *Notes on differential forms on quantum groups*, preprint, The Pennsylvania State University, 1994, pp. 1–37.
- [22] S. L. Woronowicz, *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups) de Yang-Baxter quantique constante*, Commun. Math Phys., Springer-Verlag (1989), 125–170.
- [23] S.L. Woronowicz, *Twisted $SU(2)$ group. An example of noncommutative differential calculus*, RIMS Instituto Mathathematics Science Kyoto University **23** (1987), 117–181.
- [24] B. Zumino, *Differential Geometry of Quantum Groups, X^{th} IAMP. Conf. Peipzig*, 1991 ed. Schmudgen, Spring-Verlag, 1992, pp. 117–181.
- [25] B. Zumino, P. Watts, *Cartan Calculus on Quantum Lie Algebras*, LBL-34833 UCB - PTH - 93/32, 1993, pp. 1–14.

(Recibido en mayo de 1997; revisado por el autor en noviembre de 1998)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BOGOTÁ, COLOMBIA