PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 37 (51), 1985, pp. 129–138

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $-\Delta u + cu = f$ НА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ИЗ $W_{2,*}^{s}(-\infty < s < +\infty)$

Б. С. Йованович, Л. Д. Иванович, Э. Шили

Резюме. Исследуется сходимость разностных схем, аппроксимирующих уравнение $-\Delta u+cu = f$, с условиями периодичности. Показано, что обычная схема "крест" с усредненной правой частью, сходится в дискретной W_{2*}^{m}-норме со скоростью $O(h^{\alpha})$, если решение исходной задачи принадлежит периодическому пространству Соболева-Слободецкого $W_{2,*}^{m+\alpha}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ;\ 0 < \alpha \le 2)$.

В последнее время большое внимание уделяется исследованию сходимости дискретных решний к обобщенным решениям задач математической физики. Так например, в [**1**] исследована сходимость в сеточных нормах разностной схемы для уравнения Пуассона в квадрате, с кусочно-Гёльдеровой правой частью. В [**2**—**9**] исследована сходимость разностных схем для различных уравнений эллиптического типа, чьи решения принадлежат пространствам Соболева. Похожие оценки получены в [**10**] для метода конечных элементов и в [**11**] для параболической задачи.

В данной работе исследуется скорость сходимости разностных схем для уравнения $-\Delta u+cu = f$, в случае, когда его решение принадлежит периодическим пространствам Соболева-Слободецкого. Получены согласованные оценки скорости сходимости вида: $\|z\|_{m,h} \le \operatorname{const} h^{z-m}\|u\|_{s,*}$ $(m < s \le m+2;\ m = 0, \pm 1,\ \pm 2, \dots)$

Введение

Пусть Ω — область в R^2. Как обычно, через $W_2^s(\Omega)\,(s = 0, 1, 2, \dots)$ будем обозначать пространства Соболева с нормой

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\sum_{j=0}^{s} |u|_{j,\Omega}^2\right)^{1/2}, \ \text{ где } \ |u|_{j,\Omega} = \left(\sum_{|\sigma|=j} \|D^\sigma u\|_{L_2(\Omega)}^2\right)^{1/2},$$

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2),\ \ |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2,\ D^\sigma u = \partial^{|\sigma|} u / \partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2}.$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 65 N 10.

Для не целого s, через $W_2^s(\Omega)$ будем обозначать пространства Соболева-Слободецкого [**12**], с нормой $\|u\|_{s,\Omega} = (\|u\|^2_{[s],\Omega} + |u|^2_{s,\Omega})^{1/2}$. где

$$|u|_{s,\Omega} = \left\{ \sum_{|\sigma|=[s]} \int_\Omega \int_\Omega [D^\sigma u(y) - D^\sigma u(x)]^2 |y-x|^{-2-2\{s\}} dxdy \right\}^{1/2},$$

$\{s\} = s - [s],\ \ x = (x_1, x_2),\ \ y = (y_1, y_2)$ и $|y-x| = [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2}$.

Через $W^2_{2,*}$ будем обозначать 2π-периодические пространства Соболева и Соболева-Слободецкого [**13, 14**], с нормой: $\|u\|_{s,*} \le \|u\|_{s,(-\pi,\pi)^2}$, для $s \in N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$, то есть $\|u\|_{s,^*} = (\|u\|^2_{[s],*} + |u|^2_{s,*})^{1/2}$,

$$|u|_{s,^*} = \left\{ \sum_{|\sigma|=|s|} \int_{(-\pi,\pi)^2} \int_{(-\pi,\pi)^2} [D^\sigma u(x+t) - D^\sigma u(x)]^2 |t|^{-2-2\{s\}} dxdt \right\}^{1/2},$$

для не целого $s > 0$. Для $s < 0$ через $W^s_{2,*}$ будем обозначать пространства распределений $W^s_{2,*} = (W^{-s}_{2,*})'$, с нормой

$$\|u\|_{s,^*} = \sup_{v \in W^{-s}_{2,*}} |\langle u, v\rangle| / \|v\|_{-s,^*}.$$

Рассмотрим уравнение

$$-\Delta u + cu = f \tag{1}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ и $c = const > 0$. Если $f \in W^{s-2}_{2,*}$, тогда уравнение (1) имеет единственное решение $u \in W^s_{2,*}$, и выполнена оценка

$$\|u\|_{s^*} \le M\|f\|_{s-2,^*}, \quad M = \text{const} > 0. \tag{2}$$

Для $s < 2$ уравнение (1) понимается с смысле распределений.

Все оценки скорости сходимости базируются на следующей лемме, которая является обобщением леммы Брэмбла-Гильберта [**15**].

Лемма 1. *Пусть Ω — связная область в R^2, которая удовлетворяет условию конуса. Пусть $s \ge 0$— целое число, $0 < \sigma \le 1$, $s = s + \sigma$ и $\eta = \eta(u)$ линейный ограниченный функционал на $W_2^s(\Omega)$, который обращается в нуль на многочленах степени $\le s$. Тогда для каждого $u \in W_2^s(\Omega)$ выполнено неравенство $|\eta(u)| \le M|u|_{s,\Omega}$, $M =$const> 0.*

Доказательство. Так как η — линейный ограниченный функционал на $W_2^s(\Omega)$, который обращается в нуль на многочланах степени $\le s$, то

$$|\eta(u)| \le M_1 \inf_p \|u - p\|_{s,\Omega},$$

где инфимум берётся по всем многочленам p степени $\le s$. На основании аппроксимационной теоремы Дюпон-Скотта [**16**], существует постоянная $M_2 = M_2(\Omega, s)$, не зависящая от u такая что выполнено неравенство:

$$\inf_p \|u - p\|_{s,\Omega} \le M_2 |u|_{s,\Omega}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Построение разностной схемы

Пусть $n > 2$ — натуральное число, и $h = 2\pi/n$. Плоскость (x_1, x_2) покроем сеткой $R_h^2 = \{x = (x_1, x_2) | x_j = i_j h;\ i_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;\ j = 1, 2\}$. Для функций, определенных на сетке R_h^2, будем использовать следующие обозначения: $v = v(x) = v(x_1, x_2)$,

$$\Delta_j v = (v(x + he_j) - v(x))/h, \quad \nabla_j v = (v(x) - v(x - he_j))/h,$$

где $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Через H_h обозначим пространство 2π-периодических сеточных функций

$$H_h = \{v | v(x_1 + 2\pi, x_2) = v(x_1, x_2 + 2\pi) = v(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in R_h^2\}.$$

В H_h введем скалярное произведение $(v, w)_h = h^2 \sum\limits_{x \in \omega} v(x) w(x)$,

где $\omega = \{x \in R_h^2 | -[(n-1)/2]h \le x_1,\ x_2 \le [n/2]h\}$. Введем также нормы (см. [**17**]):

$$\|v\|_h = \|v\|_{0,h} = |v|_{0,h} = (v, v)_h^{1/2}, \ \|v\|_{s,h} = \left(\sum_{j=0}^{s} |v|_{j,h}^2 \right)^{1/2}, \ s \in N,$$

$$\text{где } |v|_{j,h} = \left(\sum_{k=0}^{j} \|\Delta_1^{j-k} \Delta_2^k v\|_h^2 \right)^{1/2}, \ \text{и } \|v\|_{-s,h} = \sup_{w \in H_h} |(v, w)_h| \cdot \|w\|_{s,h}^{-1}, \ e \in N,$$

являющиеся дискретными аналогами норм Соболева.

Обозначим также

$$\Lambda_j v = -\Delta_j \nabla_j v, \quad j = 1, 2,$$
$$\Delta_h v = \Delta_1 \nabla_1 v + \Delta_2 \nabla_2 v = -\Lambda_1 v - \Lambda_2 v,$$
$$\Lambda v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v + cv.$$

Оператор Λ отображает H_h в H_h. Непосредственно проверяется, что Λ — симметричный, положительно-определенный линейный оператор, и выполняется неравенство $(\Lambda v, v)_h \ge c\|v\|_h^2$. Поэтому можем определить нормы

$$\|v\|_{\Lambda^m} = (\Lambda^m v, v)_h^{1/2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Непосредственно проверяется, что для $m \ge 0$

$$\|v\|_{\Lambda^m}^2 = \sum_{k=0}^{m} c^{m-k} C_{m,k} \sum_{j=0}^{k} C_{k,j} \|\Delta_1^{k-j} \Delta_2^j v\|_h^2.$$

Оттуда следует, что нормы $\|\cdot\|_{m,h}$ и $\|\cdot\|_{\Lambda^m}$ (а значит и $\|\cdot\|_{-m,h}$ и $\|\cdot\|_{\Lambda^{-1m}}$) — эквивалентны.

Уравнение

$$\Lambda z = \varphi, \qquad \varphi \in H_h \tag{3}$$

имеет единственное решение $z = \Lambda^{-1}\varphi \in H_h$. Из (3) следует

$$\begin{aligned} \|z\|^2_{\Lambda^m} = (\Lambda^m z, z)_h = (\Lambda^m z, \Lambda^{-1}\varphi)_h \leq \\ \leq \|z\|_{\Lambda^m}\|\Lambda^{-1}\varphi\|_{\Lambda^m} = \|z\|_{\Lambda^m}\|\varphi\|_{\Lambda^{m-2}}, \end{aligned}$$

откуда непосредсевенно получаем априорную оценку

$$\|z\|_{\Lambda^m} \leq \|\varphi\|_{\Lambda^{m-2}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Основной идеей при построении разностной схемы является усреднение правой части уравнения (1). Расмотрим поэтому функцию

$$S_\nu(x) = \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^\nu, \quad x \in R, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

S_ν можно продолжить на множество C комплексных чисел, так что продолжение будет целой функцией экспоненциального типа. По теореме Пэли-Винер-Шварца [**18**] существует распределение θ_ν на R с компактным носителем, преобазованием Фурье которого является S_ν.

Непосредственно проверяется, что θ_0 — мера Дирака, концетрированная в нуле. Для $\nu \geq 1$, θ_ν является регулярным распределением. Например

$$\theta_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & , x \in R\backslash[-1/2, 1/2], \end{cases} \qquad \theta_2(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \in R\backslash[-1, 1]. \end{cases}$$

Пусть $\nu(\nu_1, \nu_2)$, $x = (x_1, x_2)$, θ_ν — тензорное произведение распределений θ_{ν_1} и θ_{ν_2}, $G_\nu(x) = h^{-2}\theta_\nu(x/h)$ и u — какое-нибудь распределение на R^2. Оператор T_ν, определенный следующим способом: $T_\nu u = u * G_\nu$ будем называть оператором усреднения. Вместо $T_\nu = T_{(\nu_1, \nu_2)}$ будем писать и T_{ν_1, ν_2}.

Легко проверяется, что если $u \in W^s_{2,*}$, тогда $T_{11}u \in W^{s+1}_{2,*}$. Если $u \in W^s_{2,*}$, $s > 1$, тогда на основании теоремы вложения [**13**] u является непрерывной функцией, и непосредственно проверяется что в узлах сетки R^2_h

$$T_{20}\partial^2 u/\partial x_1^2 = \Delta_1 \nabla_1 u, \; T_{02}\partial^2 u/\partial x_2^2 = \Delta_2 \nabla_2 u.$$

Предположим, что правая часть f уравнения (1) принадлежит пространству $W^{s-2}_{2,*}$. Для $s > 3$, f является непрерывной, а сужение f на R^2_h принадлежит пространству H_h. Тогда уравнение (1) можем апроксимировать разностхыим уравнением

$$\Lambda \nu \equiv -\Delta_h v + cv = f, \quad x \in R^2_h, \quad v \in H_h. \tag{5}$$

Для $s > 2$, $T_{11}f$ является непрерывной функцией, и уравнение (1) можем апроксимировать с

$$\Lambda v = T_{11}f, \quad x \in R_h^2, \quad v \in H_h. \tag{6}$$

Для $s > -m$, $m \in N \cup \{0, -1\}$, f является умеренным распределением. Тогда $T_{m+3,m+3}f$ является непрерывной функцией, и сужение $T_{m+3,m+3}f$ на R_h^2 принадлежит H_h. Тогда уравнение (1) можем апроксимировать разностным уравнением

$$\Lambda v = T_{m+3,m+3}f, \quad x \in R_h^2, \quad v \in H_h. \tag{7}$$

Сходимость разностной схемы (6)

Пусть $u \in W_{2,8}^s$ $(s > 2)$ — решение уравнения (1), и v — решение уравнения (6).Функция $z = u - v$ определена в узлах сетки R_h^2, принадлежит пространству H_h, и удовлетворяет уравнению (3), где:

$$\varphi = \Delta_1\eta_1 + \Delta_2\eta_2 + c\zeta,$$

$$\begin{aligned}
&\eta_1(x_1, x_2) = (T_{01}\partial u/\partial x_1)|_{(x_1-h/2,x_2)} - \nabla_1 u(x_1, x_2),\\
&\eta_2(x_1, x_2) = (T_{10}\partial u/\partial x_2)|_{(x_1,x_2-h/2))} - \nabla_2 u(x_1, x_2),\\
&\zeta = u - T_{11}u.
\end{aligned}$$

Из (4) следует

$$\|z\|_{\Lambda^2} \le \|\Delta_1\eta_1\|_h + \|\Delta_2\eta_2\|_h + c\|\zeta\|_h. \tag{8}$$

Оценим сначала $\|\Delta_1\eta_1\|_h$. Предварительно отобразим область

$$e(i_1, i_2) = \{x|(i_1 - 1)h \le x_1 \le (i_1 + 1)h,\ (i_2 - 1/2)h \le x_2 \le (i_2 + 1/2)h\}$$

на прямоугольник $E = \{t| -1 \le t_1 \le 1,\ -1/2 \le t_2 \le 1/2\}$, полагая $x_j = i_jh + t_jh$, $j = 1, 2$, $u(x) = u^*(t)$. Следует

$$\Delta_1\eta_1(i_1h, i_2h) = h^{-2}\Big\{\int_{-1/2}^{1/2}\Big[\frac{\partial u^*(1/2, t_2)}{\partial t_1} - \frac{\partial u^*(-1.2, t_2)}{\partial t_1}\Big]dt_2 - \\
- [u^*(1, 0) - 2u^*(0, 0) + u^*(-1, 0)]\Big\}.$$

Из теорем вложения (13) следует, что $\Delta_1\eta_1$ является линейным ограниченным функционалном на $W_2^s(E)$, $s > 2$

$$|\Delta_1\eta_1| \le 2h^{-2}\max_{t\in E}|\partial u^*/\partial t_1| + 4h^{-2}\max_{t\in E}|u^*(t)| \le Mh^{-2}\|u^*\|_{s,E}$$

Кроме того, $\Delta_1\eta_1 = 0$ — если $u^*(t)$ многочлен степени ≤ 3. Из леммы 1 следует

$$|\Delta_1\eta_1| \le M_1h^{-2}|u^*|_{s,E}, \qquad 2 < s \le 4.$$

Возвращаясь на старые переменные получаем:

$$|\Delta_1\eta_1(i_1h,i_2h)| \le M_2h^{s-3}|u|_{s,e(i_1,i_2)}, \qquad 2 < s \le 4.$$

Отсюда дальше получаем оценку

$$\|\Delta_1\eta_1\| \le \mathrm{const}\cdot h^{s-2}|u|_{s,*}, \quad 2 < s \le 4. \tag{9}$$

Аналогичная оценка выполнена и для $\|\Delta_2\eta_2\|_h$.

Выражение ζ является ограниченным линейным функционалом на W_2^s, $s > 1$, который обращается в нуль на многочленах степени ≤ 1. Используя изложенную методику, получаем оценку

$$\|\zeta\|_h \le \mathrm{const}\cdot h^{s}|u|_{s,*}, \quad 1 < s \le 2. \tag{10}$$

Из (8–10) получаем следующую оценку скорости сходимости разностной схемы (6)

$$\|z\|_{\Lambda^2} \le \mathrm{const}\cdot h^{s-2}\|u\|_{s,*}, \quad 2 < s \le 4. \tag{11}$$

Сходимость разностной схемы (5)

Пусть $u \in W^s_{z,*}(s > 3)$ — решение уравнения (1), v — решение разностного уравнения (5) и $z = u - v$. Функция z определена в узлах сетки R^2_h, принадлежит пространству H_h и удовлетворяет уравнению (3), где

$$\varphi = \eta_1 + \eta_2, \ \ \eta_j = \partial^2u/\partial x_j^2 - \Delta_j\nabla_j u, \qquad j = 1, 2.$$

Пусть $m \ge 3$ — целое число, и $s > m$. Из (4) следует

$$\|z\|_{\Lambda^m} \le \|\eta_1\|_{\Lambda^{m-2}} + \|\eta_2\|_{\Lambda^{m-2}} \tag{12}$$

Дальше получаем

$$\|\eta_j\|^2_{\Lambda^{m-2}} = \sum_{k=0}^{m-2} c^{m-2-k}C_{m-2,k}\sum_{i=0}^{n} C_{k,i}\|\Delta_1^{k-i}\Delta_2^i\eta_j\|_h^2.$$

Выражение $\Delta_1^{k-i}\Delta_2^i\eta_j$ является линейным ограниченным функционалом на W_2^s, $s > 3$, который обращается в нуль на многочленах степени $\le k+3$. С помощью леммы 1, как в предыдущих случаях, получаем оценку

$$\|\Delta_1^{k-i}\Delta_2^i\eta_j\|_h \le \mathrm{const}\cdot h^{s-k-2}|u|_{s,*},$$

где $\max\{k+2, 3\} < s \le k+4$. Отсюда получаем

$$\|\eta_j\|_{\Lambda^{m-2}} \le \mathrm{const}\cdot h^{s-m}\|u\|_{s,*}, \quad 3 \le m < s \le m+2. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем следующую оценку скорости сходимости разностной схемы (5)

$$\|z\|_{\Lambda^m} \le \mathrm{const}\cdot h^{s-m}\|u\|_{s,*}, \quad 3 \le m < s \le m+2. \tag{14}$$

Сходимость разностной схемы (7)

Пусть решение u уравнения (1) принадлежит пространству $W^s_{2,*}$, где $s > -m$ и $m \in N \cup \{0, -1\}$. Тогда $T_{m+1,m+1}u$ — непрерывная, 2π-периодическая функция. Пусть v — решение уравнения (7), и $z = T_{m+1,m+1}u - v$. Функция z определена в узлах сетки R^2_h, принадлежит пространству H_h, и удовлетворяет уравнению (3), где

$$\varphi = -\Delta_1\nabla_1\eta_1 - \Delta_2\nabla_2\eta_2 + c\zeta = \Lambda_1\eta_1 + \Lambda_2\eta_2 + c\zeta,$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= T_{m+1,m+1}u - T_{m+1,m+3}u, \\ \eta_2 &= T_{m+1,m+1}u - T_{m+3,m+1}u, \\ \zeta &= T_{m+1,m+1}u - T_{m+3,m+3}u. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $$p = [(m+1)/2] \quad \text{и} \quad U_0 = u \in W^2_{2,*},$$

$$\begin{aligned} &-\Delta U_1 + cU_1 = U_0, && U_1 \in W^{s+2}_{2,*} \\ &-\Delta U_2 + cU_2 = U_1, && U_2 \in W^{s+4}_{2,*} \\ &\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ &-\Delta U_p + cU_p = U_{p-1}, && U = U_p \in W^{s+2p}_{2,*} \end{aligned}$$

Следует

$$\begin{aligned} &T_{m+1,m+1}u = T_{m+1,m+1}(-\Delta + cI)^p U = \\ &= T_{m+1,m+1}\sum_{q=0}^{p} C_{p,q}(-1)^{p-q}c^q\Delta^{p-q}U = \\ &T_{m+1,m+1}\sum_{q=0}^{p} C_{p,q}(-1)^{p-q}c^q\sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r}\partial^{2p-2q}U/\partial x_1^{2p-2q-2r}\partial x_2^{2r} = \\ &\sum_{q=0}^{p} C_{p,q}(-1)^{p-q}c^q\sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r}\Delta_1^{p-q-r}\nabla_1^{p-q-r}\Delta_2^r\nabla_2^r(T_{m+1-2p+2q+2r,m+1-2r}U). \end{aligned}$$

Похоже представляются и $T_{m+1,m+3}u$, $T_{m+3,m+1}u$ и $T_{m+3,m+3}u$, так что, подставляя соответствующие выражения в (15), получаем:

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{q=0}^{p} C_{p,q}c^q\sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r}(&\Lambda_1^{p-q-r+1}\Lambda_2^r\alpha_{qr} + \\ &+ \Lambda_1^{p-q-r}\Lambda_2^{r+1}\beta_{qr} + c\Lambda_1^{p-q-r}\Lambda_2^r\gamma_{qr}) \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{qr} &= T_{m+1-2p+2q+2r,m+1-2r}U - T_{m+1-2p+2q+2r,m+3-2r}U, \\ \beta_{qr} &= T_{m+1-2p+2q+2r,m+1-2r}U - T_{m+3-2p+2q+2r,m+1-2r}U, \\ \gamma_{qr} &= T_{m+1-2p+2q+2r,m+1-2r}U - T_{m+3-2p+2q+2r,m+3-2r}U. \end{aligned}$$

Легко видеть что α_{qr}, β_{qr} и γ_{qr} — непрерывные функции.

Из (4) и (6) следует

$$\|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \sum_{q=0}^{p} C_{p,q} c^q \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} (\|\Lambda_1^{p+1-q-r} \Lambda_2^r \alpha_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} + \|\Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^{r+1} \beta_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} + c\|\Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^r \gamma_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}}. \tag{17}$$

Дальше

$$\|\Lambda_1^{p+1-q-r} \Lambda_2^r \alpha_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} \leq \|\Lambda^{p+1-q} \alpha_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} \leq$$
$$\leq c^{-q} \|\Lambda^{p+1} \alpha_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} = c^{-q} \|\alpha_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}},$$

и похоже

$$\|\Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^{r+1} \beta_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} \leq c^{-q} \|\beta_{gr}\|_{\Lambda^{2p-m}},$$
$$c\|\Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^r \gamma_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} \leq c^{-q} \|\gamma_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}}.$$

Из этих оценок и (17) получаем априорную оценку

$$\|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \sum_{q=0}^{p} C_{p,q} \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} (\|\alpha_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}} + \beta_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}} + \|\gamma\|_{\Lambda^{2p-m}}). \tag{18}$$

Если m — нечетное число, тогда $p = (m+1)/2$, так что из (18) получаем

$$\|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \sum_{q=0}^{p} C_{p,q} \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} (\|\alpha_{qr}\|_{\Lambda} + \|\beta_{qr}\|_{\lambda} + \|\gamma_{qr}\|_{\Lambda}). \tag{19}$$

Функция U принадлежит пространству $W_{2,*}^{s+m+1}$, где $s + m + 1 > 1$, и из теоремы вложения следует что U непрерыва.

Выражения $\Delta_j \alpha_{qr}$ являются линейными ограниченными функционалами на $W_{2,*}^{s+m+1}$, $s > -m$, которые обращаются в нуль на многочленах степени ≤ 2. Из леммы 1, используя изложенную методику, получаем

$$\|\Delta_j \alpha_{qr}\|_h \leq \text{const} \cdot h^{s+m} |U|_{s+m+1,*}, \quad -m < s \leq -m+2. \tag{20}$$

Выражения α_{qr} являются линейными ограниченными функционалами на W_2^{s+m+1}, $s > -m$, которые обращаются в нуль на многочленах степени ≤ 1. Из леммы 1 следует

$$\|\alpha_{qr}\|_h \leq \text{const} \cdot h^{s+m+1} |U|_{s+m+1,*}, \quad -m < s \leq -m+1 \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует:

$$\|\alpha\|_\Lambda \leq \text{const} \cdot h^{s+m} \|U\|_{s+m+1,*}, \ -m < s \leq -m+2 \tag{22}$$

Аналогичные оценки выполнены и для $\|\beta_{qr}\|_\Lambda$ и $\|\gamma_{qr}\|_\Lambda$, так что заменой в (19) получаем

$$\|z\|_{\Lambda-m} \leq \mathrm{const}\cdot h^{s+m}\|U\|_{s+m+1,*}, \ \ -m < s \leq -m+2. \tag{23}$$

Далее, на основании (2), имеем

$$\begin{aligned}\|U\|_{s+m+1,*} &\leq \mathrm{const}\|U_{p-1}\|_{s+m+1,*} \leq \cdots \\ \cdots &\leq \mathrm{const}\|u\|_{s+m+1-2p,*} = \mathrm{const}\|u\|_{s,*},\end{aligned}$$

что вместе с (23) дает аппpиорную оценку

$$\|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \mathrm{const}\cdot h^{s+m}\|u\|_{s,*}, \ \ -m < s \leq -m+2 \tag{24}$$

Если m — четное число, тогда $p = m/2$, и из (18) получаем:

$$\|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \sum_{q=0}^{p} C_{p,q} \sum_{r=0}^{p-q,r} (\|\alpha_{qr}\|_h + \|\beta_{qr}\|_h + \|\gamma_{gr}\|_h). \tag{25}$$

Функция U принадлежит пространству $W_{2,*}^{s+m}$, $s+m>0$, так что $T_{11}U$ — непрерывная функция.

Выражения α_{qr}, β_{qr} и γ_{qr} являются линейыми ограниченными функционалами на W_2^{s+m}, $s > -m$, которые обращаются в нуль на многочленах степени ≤ 1. Как в предыдущих случаях, из леммы 1 получаем оценки

$$\|\alpha_{qr}\|_h, \|\beta_{qr}\|_h, \|\gamma_{qv}\|_h \leq \mathrm{const}\cdot h^{s+m}\|U\|_{s+m,^*} \tag{26}$$

(где $-m < s \leq -m+2$). Далее имеем

$$\|U\|_{s+m,^*} \leq \mathrm{const}\|U_{p-1}\|_{s+m-2,^*} \leq \cdots \leq \mathrm{const}\|u\|_{s+m-2p,^*} = \mathrm{const}\|u\|_{s,^*} \tag{27}$$

Из (25–27), как и в предыдущем случае, получаем оценку (24).

Заключение

Полученные оценки скорости сходимости (11), (14) и (24) можно объединить следующим способом.

Пусть решение u уравнения (1) принадлежит пространству $W_{2,*}^s$, и пустъ $s > m$, где m — целое число. Рассмотрим разностную схему

$$\Lambda v = \varphi, \qquad \varphi, v \in H_h$$

где

$$\varphi = \begin{cases} f, & \text{для } m \geq 3, \\ T_{3-m,3-m}f, & \text{для } m \leq 2. \end{cases}$$

Обозначим также

$$z = \begin{cases} u - v & \text{для } m \geq 1, \\ T_{1-m,1-m}u - v, & \text{для } m \leq 0. \end{cases}$$

Тогда выполнена оценка скорости сходимости

$$\|z\|_{\Lambda^m} \le \text{const} \cdot h^{s-m}\|u\|_{s,*}, \ m < s \le m+2. \tag{28}$$

Из (28) и (2) дальше получаем оценку

$$\|z\|_{\Lambda^m} \le \text{const} \cdot h^{s-m}\|f\|_{s-2,*}, \ m < s \le m+2. \tag{29}$$

Принимая во внимание эквивалентность норм $\|\cdot\|_{\Lambda^m}$ и $\|\cdot\|_{m,h}$ из (28) и (29) получаем оценки

$$\|z\|_{m,h} \le \text{const} \cdot h^{s-m}\|u\|_{s,*}, \ \|z\|_{m,h} \le \text{const} \cdot h^{s-m}\|f\|_{s-2,*}$$
$$(m < s \le m+2; \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Березин, *Оценка скорости сходимости разностной схемы для уравнения Пуассона с кусочно-непрерывной правой частью* Вестник Москов. Унив. Сер. XV Вычисл. Мат. Кибернет. **2** (1979), 26–31.

[2] В. Л. Макаров, И. П. Гаврилюк, С. П. Пирназаров, *О сходимости разностных решений к решениям бигармонического уравнения из классов W_2^k*, Веснтик Каракалпак. Фил. Акад. Наук Уз ССР **1** (**79**) (1980), 3–10.

[3] Р. Д. Лазаров, *К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона*, Дифференциальные Уравнения **17** (1981), 1285–1294.

[4] Р. Д. Лазаров, *О сходимости разностных решений к обобщенным решениям бигармонического уравнения в прямоугольнике*, Дифференциальные Уравнения **17** (1981), 1295–1303.

[5] Р. Д. Лазаров, *О сходимости разностных схем для некоторых осесимметричних задач математической физики в классах обобщенных решений*, Докл. Акад. Наук СССР, **258** (1981), 1301–1304.

[6] Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений*, Докл. Акад. Наук СССР **259** (1981), 282–286.

[7] Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы второго порядка точности для осесиметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях из W_2^2*, Ж Вычисл. Мат. Мат. Физ. **21** (1981), 1168–1179.

[8] Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, А. А. Самарский, *Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях*, Мат. Сб. **117** (**159**) (1982), 469–480.

[9] И. П. Гаврилюк, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, С. П. Пирназаров, *Оценки скорости сходимости разностных схем для уравнений четвертого порядка эллиптического типа*, Ж. Вычисл. Мат. Мат. Физ. **23** (1983), 355–365.

[10] Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец, *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений*, Акад. Наук Арм. ССР, Ереван, 1979.

[11] W. Hakbusch, *Optimal $H^{p,p/2}$ error estimates for a parabolic Galerkin method*, SIAM J. Numer. Anal. **18** (1981), 681–692.

[12] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[13] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, Москва, 1969.

[14] О. В. Бесов, *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*, Труды Мат. Инст. Стеклова **60** (1961), 42–81.

[15] J. H. Bramble, S. R. Hilbert, *Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation*, Numer. Math. **16**(1971), 362–369.

[16] T. Dupont, R. Scott, *Polynomial approximation in Sobolev spaces*, Math. Comput. **34** (1980), 441–464.

[17] Ю. И. Мокин, *Сеточный аналог теоремы вложения для классов типа W*, Ж. Вычисл. Мат. Мат. Физ. **11** (1971), 1361–1373.

[18] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1973.

Одсек за математику
Природно-математички факултет
11000 Београд

(Поступила 25 06 1983)