

Псевдосферические поверхности и некоторые задачи математической физики

А. Г. ПОПОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ap129@yandex.ru

УДК 514.752

Ключевые слова: геометрия Лобачевского, нелинейное дифференциальное уравнение, теория поверхностей.

Аннотация

В статье обсуждаются некоторые аспекты приложений теории псевдосферических поверхностей и геометрии Лобачевского к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Abstract

A. G. Popov, Pseudospherical surfaces and some problems of mathematical physics, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 227–239.

In the paper, some aspects of the interrelation of Lobachevsky geometry and nonlinear differential equations are discussed.

Эту статью, популярно освещающую некоторые аспекты геометрии Лобачевского и её приложений в математической физике, автор посвящает памяти видного математика-геометра профессора Эдуарда Генриховича Позняка. Имя Э. Г. Позняка всегда связывается не только с его выдающимися результатами в области геометрии Лобачевского и нелинейных проблем современной математической физики, но и с его неоценимыми усилиями по продвижению идей геометрии в самые широкие круги исследователей. Блестящий лектор и ученый-геометр, он всегда считал своим долгом публикование популярных работ по геометрии в целом. Особый вклад в развитие основ преподавания геометрии он внёс, будучи одним из инициаторов и авторов ныне общенародно признанной серии учебников по геометрии для школьников.

* * *

Обращение в середине XIX в. геометров к псевдосферическим поверхностям — поверхностям постоянной отрицательной кривизны $K \equiv -1$ — явилось важным шагом в развитии математики. Псевдосферические поверхности имели большое значение для наглядной интерпретации неевклидовой гиперболической геометрии, открытой Н. И. Лобачевским. Последующее развитие математики

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 227–239.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

обнаружило тесную связь псевдосферических поверхностей с теорией сетей, теорией солитонов, аттракторами, нелинейными уравнениями математической физики, преобразованиями Бэклунда и др. В настоящей статье мы обратимся к анализу концептуальных математических истоков этих геометрических объектов и проследим их влияние на последующее развитие современной математики и физики.

1. Основания геометрии Лобачевского и её интерпретации

Геометрия, открытая Лобачевским, явилась венцом многовековых попыток доказательства пятого постулата Евклида (или аксиомы о параллельных) в евклидовой геометрии: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её*. Пятый постулат Евклида, лежащий в основе всей известной к тому времени геометрии, воспринимался как чересчур сложное утверждение. Поэтому довольно естественными на протяжении многих веков были попытки вывода пятого постулата Евклида из остальных аксиом геометрии.

Окончательный результат по проблеме пятого постулата принадлежит Н. И. Лобачевскому и заключается в том, что пятый постулат Евклида не может быть доказан на основе других принятых аксиом евклидовой геометрии. Более того, допущение постулата, противоположного по смыслу аксиоме о параллельных, приводит к построению новой геометрии, столь же содержательной, как и евклидова. Научное сообщение об открытии новой геометрии было сделано Н. И. Лобачевским в Казанском университете в 1826 г., а сама работа «О началах геометрии» была им опубликована в 1829—1930 гг. В новой геометрии, называемой теперь геометрией Лобачевского, вместо пятого постулата Евклида принято следующее положение: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её*. Первоначальные аксиомы геометрии Евклида составляют содержание так называемой *абсолютной геометрии*.

Распространение идей Лобачевского столкнулось с определёнными трудностями, связанными с привычным ассоциативным восприятием используемых терминов. Поэтому поясним, что в геометрии Лобачевского «прямая» понимается как кратчайшая линия — линия, расстояние вдоль которой между двумя точками, ей принадлежащими, является наименьшим. Понятие параллельности двух прямых подразумевает лишь их непересечение и не вбирает в себя свойство эквидистантности (равноотстояния) двух параллельных прямых.

Новую геометрию, опирающуюся на введённую систему аксиом, уже сам Лобачевский называл «воображаемой» геометрией и рассматривал её как возможную *теорию пространственных отношений*.

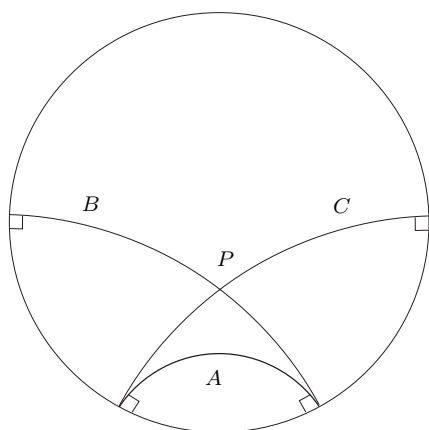


Рис. 1. Модель Пуанкаре

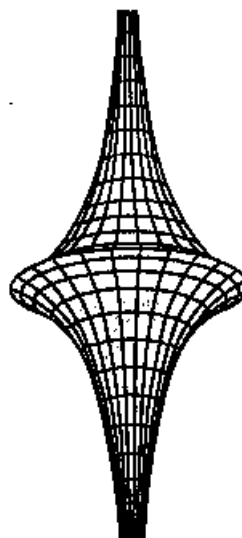


Рис. 2. Псевдосфера Бельтрами

Построение модельных интерпретаций геометрии Лобачевского на евклидовой плоскости связано с идеями Пуанкаре, Кэли, Клейна. В частности, в интерпретации Пуанкаре (см. рис. 1) за плоскость Лобачевского Λ^2 принимается внутренность некоторого (к примеру, единичного) круга на евклидовой плоскости, прямыми считаются дуги окружностей, перпендикулярных границе данного круга (абсолюту), и его диаметры. Движения представляют собой композиции инверсий относительно окружностей, дуги которых служат прямыми. Модель Пуанкаре конформна, т. е. углы между прямыми на Λ^2 совпадают с соответствующими евклидовыми углами между дугами.

В работах Ф. Миндинга, Е. Бельтрами, У. Дини и др. (см. [10, 12]) был построен и детально изучен ряд поверхностей, на которых реализуется внутренняя геометрия частей плоскости Лобачевского. Такие поверхности именуются сейчас псевдосферическими поверхностями по названию наиболее характерной поверхности из их класса — псевдосферы (рис. 2), открытой Миндингом (1838 г.) и исчерпывающе исследованной Бельтрами (1868 г.) в контексте её связи с геометрией Лобачевского.

2. Элементы аппарата теории поверхностей

Общее аналитическое выражение поверхности S определяется заданием декартовых координат точек поверхности как функций двух параметров u и v :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Сама поверхность S при этом однозначно задаётся в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 своим радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$:

$$\mathbf{r} = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}.$$

Согласно теореме Боннэ [6] поверхность S также однозначно определяется с точностью до движений в пространстве своими первой и второй квадратичными формами

$$I = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (1)$$

$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2, \quad (2)$$

описывающими её внутреннюю и внешнюю геометрию. Отметим, что коэффициенты метрики (1) определяются исключительно радиус-вектором \mathbf{r} по формулам

$$E = \mathbf{r}_u^2, \quad F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v^2$$

и позволяют вычислить гауссову кривизну K поверхности S .

Поставим задачу об отыскании в пространстве E^3 поверхности S с метрикой (1) и кривизной K . Такая задача называется задачей об *изометрическом погружении* метрики ds^2 в евклидово пространство E^3 . Разрешение данной задачи связано с интегрированием следующих основных уравнений теории поверхностей:

- уравнений Петерсона—Кодацци

$$\begin{aligned} L_v + \Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N &= M_u + \Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M, \\ M_v + \Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N &= N_u + \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M, \end{aligned} \quad (3)$$

- уравнения Гаусса

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{F} \left[\frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^1 - \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right], \quad (4)$$

- деривационных формул

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_v + L \mathbf{n}, \\ \mathbf{r}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{r}_v + M \mathbf{n}, \\ \mathbf{r}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{r}_v + N \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_u &= \frac{1}{EG - F^2} [(FM - GL) \mathbf{r}_u + (FL - EM) \mathbf{r}_v], \\ \mathbf{n}_v &= \frac{1}{EG - F^2} [(NF - GM) \mathbf{r}_u + (FM - EN) \mathbf{r}_v]. \end{aligned} \quad (5)$$

Первая группа уравнений (уравнения Петерсона—Кодацци и Гаусса (3), (4)) связывает коэффициенты первой и второй квадратичных форм (1), (2). Вторая группа уравнений (5) (деривационные формулы) задаёт по уже известным коэффициентам E, F, G, L, M, N радиус-вектор \mathbf{r} и вектор единичной нормали \mathbf{n} поверхности S , т. е. окончательно определяет поверхность в пространстве. Символы Кристоффеля $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ зависят от коэффициентов метрики (1) и их производных [6].

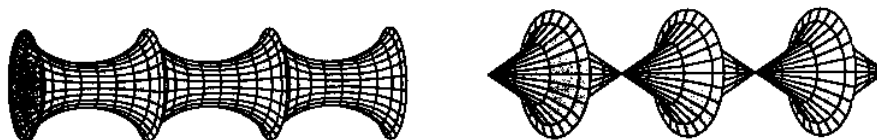


Рис. 3. Псевдосферические поверхности вращения

3. Классические псевдосферические поверхности

В 1838 г. Ф. Миндинг провёл исследование поверхностей вращения постоянной кривизны. Метод Миндинга сводился к отысканию той формы меридиана $x = \varphi(z)$ (кривой, вращаемой вокруг оси Oz), которая обеспечивала бы постоянную кривизну поверхности. Уравнение

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}, \quad (6)$$

выражающее гауссову кривизну явно заданной поверхности $z = z(x, y)$, в данном случае переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$K \cdot \varphi = -\frac{\varphi''}{(1 + \varphi'^2)^2} \quad (7)$$

и при постоянном заданном значении K может быть проинтегрировано. Это приводит к следующему параметрическому виду меридиана как обратной функции $z = \varphi^{-1}(x)$:

$$z = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{Kx^2 - (\lambda - 1)}{\lambda - Kx^2}} dx.$$

Полученный результат позволил Миндингу при $K \equiv -1$ выделить три типа псевдосферических поверхностей вращения, представленных на рис. 3.

Особую роль среди псевдосферических поверхностей играет псевдосфера (рис. 2), уравнения которой могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{r}(u, v): \begin{cases} x = \sin u \cos v, & 0 < u < \pi, \\ y = \sin u \sin v, & -\infty < v < +\infty. \\ z = \ln \operatorname{ctg} \frac{u}{2} - \cos u, \end{cases}$$

Э. Бельтрами было установлено, что внутренняя геометрия псевдосферы совпадает с геометрией части плоскости Лобачевского — орикруга. Если точкам и прямым на конечной области плоскости Лобачевского поставить в соответствие

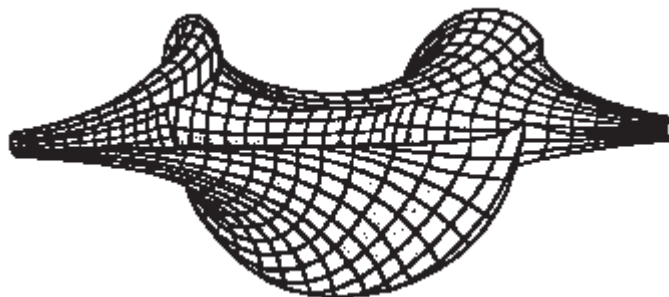


Рис. 4. Поверхность Дини

точки и кратчайшие линии (геодезические) на псевдосфере, а движению в плоскости Лобачевского поставить в соответствие перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием (деформацией, сохраняющей длины), то для всякой теоремы (утверждения) в геометрии Лобачевского будет иметь место соответствующий факт на псевдосфере.

Таким образом, благодаря появлению первых псевдосферических поверхностей геометрия Лобачевского получила наглядную интерпретацию.

Исследования Миндинга и Бельтрами положили начало развитию нового раздела дифференциальной геометрии — теории поверхностей отрицательной кривизны, прежде всего псевдосферических. Следующим классическим примером стала винтовая псевдосферическая поверхность, построенная Дини (рис. 4).

4. Преобразование Бэклунда, чебышёвские сети и уравнение синус-Гордона

Следующий шаг в развитии теории псевдосферических поверхностей был сделан в конце 80-х годов XIX столетия. В это время было открыто преобразование Бэклунда и установлена взаимосвязь внутригеометрических характеристик псевдосферических поверхностей с нелинейными дифференциальными уравнениями.

Концептуальную роль в этом сыграла работа П. Л. Чебышёва «О кройке одежды» [9], в которой были исследованы свойства специальных сетей линий на поверхностях. Такие сети, называемые теперь *чебышёвскими*, характеризуются следующим свойством: *в каждом сетевом четырёхугольнике противоположные стороны равны*. Выражение для квадрата линейного элемента поверхности в координатах, связанных с чебышёвской сетью, имеет вид

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos z \, du \, dv + dv^2. \quad (8)$$

Из (8) с использованием формулы (4) для гауссовой кривизны получаем, что при $K \equiv -1$ функция $z(u, v)$, имеющая смысл сетевого угла, должна удовлетворять уравнению

$$z_{uv} = \sin v, \quad (9)$$

получившему название уравнения синус-Гордона.

Уравнение синус-Гордона, играющее важную роль в современной физике, является центральным в алгоритме построения новых псевдосферических поверхностей, предложенном Бэклундом. Отметим, что преобразование Бэклунда, широко используемое в настоящее время в теории нелинейных уравнений, исторически впервые возникло в 1876 г. именно в дифференциальной геометрии как преобразование псевдосферических поверхностей.

Геометрическое содержание преобразования Бэклунда состоит в следующем. Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 имеется некоторая псевдосферическая поверхность S с радиус-вектором \mathbf{r} . Тогда по этой поверхности всегда может быть построена новая псевдосферическая поверхность S^* с радиус-вектором \mathbf{r}^* по формуле

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \omega \sin \sigma (\boldsymbol{\tau}_1 \cos z^* + \boldsymbol{\tau}_2 \sin z^*), \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ — единичные касательные векторы к линиям кривизны¹ на поверхности S , ω, σ — некоторые числовые параметры. Функция $z^*(u, v)$ в правой части (10) — это сетевой угол чебышёвской сети на новой поверхности S^* , $z^*(u, v)$ удовлетворяет уравнению синус-Гордона (9). Решение $z^*(u, v)$ связано с решением $z(u, v)$, имеющим аналогичный смысл по отношению к исходной поверхности S , уравнениями

$$\frac{\partial z^*}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2k \sin \frac{z^* + z}{2}, \quad \frac{\partial z^*}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{2}{k} \sin \frac{z^* - z}{2}, \quad k = \text{const}. \quad (11)$$

Формулы (11) называются преобразованием Бэклунда для уравнения синус-Гордона. Общее решение системы (11) к настоящему времени не получено, известна лишь рекуррентным образом определяемая серия решений

$$z_{n+1} = z_{n-1} + 4 \arctg \left[\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \operatorname{tg} \frac{z_n^{(1)} - z_n^{(2)}}{4} \right], \quad k_1, k_2 = \text{const}, \quad z_0 \equiv 0, \quad (12)$$

задающая класс так называемых многосолитонных решений и соответствующее им бесконечное число псевдосферических поверхностей. (В физике под солитонами понимают уединённые волны, распространяющиеся с постоянной скоростью и имеющие неизменный профиль. Таким волнам свойствен особый характер взаимодействия, единственным результатом которого является сдвиг фаз взаимодействующих волн).

¹Линия на поверхности называется линией кривизны, если её направление в каждой точке является главным направлением, т. е. направлением, в котором нормальная кривизна поверхности достигает экстремального значения.

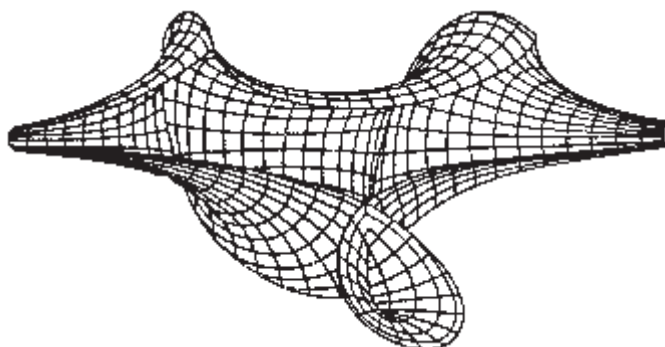


Рис. 5. Двухсолитонная псевдосферическая поверхность

В заключение этого раздела обратим внимание на частный пример двухсолитонной псевдосферической поверхности (рис. 5), напоминая, что общая классификация солитонных псевдосферических поверхностей находится в настоящий момент на стадии своего формирования.

5. Теорема Д. Гильберта и последующие результаты

Как уже отмечалось, на регулярных частях псевдосферических поверхностей реализуется геометрия, совпадающая с геометрией отдельных частей плоскости Лобачевского. Непременным атрибутом этих поверхностей являются особенности — нерегулярные рёбра или острия.

Д. Гильберт в 1901 г. в работе «О поверхностях постоянной гауссовой кривизны» исследовал вопрос о возможности реализации в евклидовом пространстве E^3 полной плоскости Лобачевского. Результат Д. Гильберта состоит в том, что *в пространстве E^3 не существует полной и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию полной плоскости Лобачевского*. Иными словами, плоскость Лобачевского не реализуется «в целом» в трёхмерном евклидовом пространстве. В связи с этим возникла проблематика возможной реализации плоскости Лобачевского в многомерных евклидовых пространствах. Имеющиеся результаты по этой проблеме были получены сравнительно недавно. В 1953 г. Д. Блануша и в 1960 г. Э. Р. Розендорн доказали возможность регулярной реализации плоскости Лобачевского соответственно в пространствах E^6 и E^5 . Вопрос же о регулярной реализации плоскости Лобачевского в четырёхмерном евклидовом пространстве E^4 до сих пор остаётся открытым и представляет одну из актуальных нерешённых проблем современной геометрии.

Начиная с конца 50-х — начала 60-х годов в научной геометрической школе Н. В. Ефимова и Э. Г. Позняка в Московском университете проводятся исследования по проблеме изометрических погружений (реализации) двумерных метрик отрицательной кривизны в E^3 . В 1975 г. Н. В. Ефимов усилил результат Гильберта, доказав невозможность изометрического погружения в E^3 полуплоскости Лобачевского.

Одним из центральных общих вопросов стал вопрос о том, какие части плоскости Лобачевского могут быть регулярно погружены в E^3 . Среди полученных в этой области результатов укажем на возможность изометрического погружения в E^3 таких частей плоскости Λ^2 , как бесконечная полоса (область, содержащая два орикурга), специальные типы многоугольников и др.

Отмеченные результаты были получены при исследовании основных уравнений теории поверхностей в новой форме как системы уравнений в римановых инвариантах (уравнений Рождественского—Позняка) [2, 7]

$$\begin{aligned} r_x + sr_y &= A_0 + A_1r + A_2s + A_3r^2 + A_4rs + A_5r^2s, \\ s_x + rs_y &= A_0 + A_2r + A_1s + A_3s^2 + A_4rs + A_5rs^2, \end{aligned} \quad (13)$$

в которой A_i являются некоторыми функциями символов Кристоффеля метрики отрицательной кривизны, а римановы инварианты $r(x, y)$ и $s(x, y)$ связаны с коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности следующим образом:

$$r = -\frac{m+k}{n}, \quad s = \frac{-m+k}{n}$$

где

$$m = \frac{M}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad n = \frac{N}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad K \equiv -k^2.$$

В целом отметим, что система (13) квазилинейных уравнений гиперболического типа придаёт основным уравнениям теории поверхностей более удобную форму, позволяющую применить к их исследованию методы современной теории дифференциальных уравнений, к примеру таких, как метод малого параметра.

6. Поверхность Бианки—Амслера и другие поверхности

Л. Бианки в 1927 г. в своем известном курсе по дифференциальной геометрии [11] указал на возможность существования в пространстве E^3 поверхности кривизны $K \equiv -1$, содержащей две пересекающиеся прямолинейные образующие. Этой поверхности отвечает автомодельное решение уравнение синус-Гордона (9). Автомодельная переменная $t = uv$ редуцирует уравнение (9) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$tz'' + z' = \sin z, \quad (14)$$

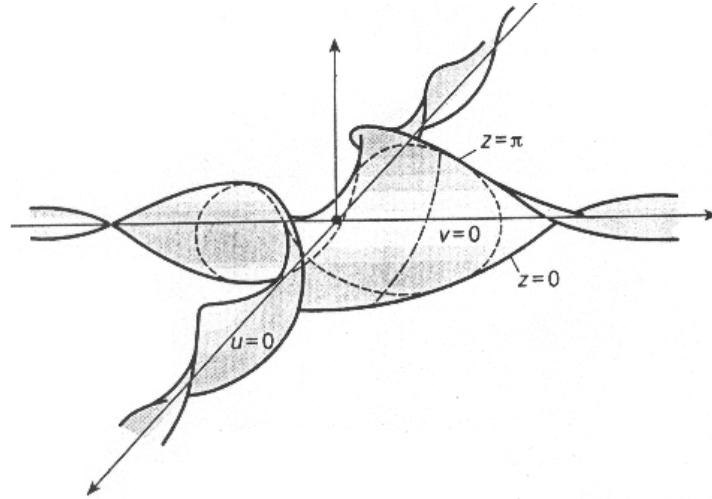


Рис. 6. Поверхность Амслера

которое путём замены $w = e^{iz}$ сводится к уравнению

$$w'' - \frac{w'^2}{w} + \frac{2w' - w^2 + 1}{2t} = 0,$$

определяющему класс так называемых третьих трансцендентных функций Пенлеве.

Последующие результаты по исследованию псевдосферической поверхности, связанной с решением уравнения синус-Гордона $z(t)$, принадлежат М. Амслеру (1955 г.), проанализировавшему (прежде всего численно) её качественный вид. На рис. 6 представлена поверхность Бианки—Амслера, отвечающая части решения, заданной на отрезке между $z = 0$ и $z = \pi$ вблизи нуля. Поверхность имеет структуру, состоящую из закручивающихся и сужающихся на бесконечности полос, регулярно сопряжённых в начале координат. Последние результаты по асимптотике третьих трансцендентных функции Пенлеве подтверждают качественные представления Амслера о поверхности и указывают на её многослоевую структуру, обусловленную характером осцилляций функций Пенлеве на бесконечности.

На рис. 7 представлены псевдосферические поверхности, полученные в различных последних научных публикациях. Эти поверхности соответствуют различным решениям уравнения синус-Гордона, получаемым с помощью метода обратной задачи рассеяния — одного из наиболее эффективных современных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений.

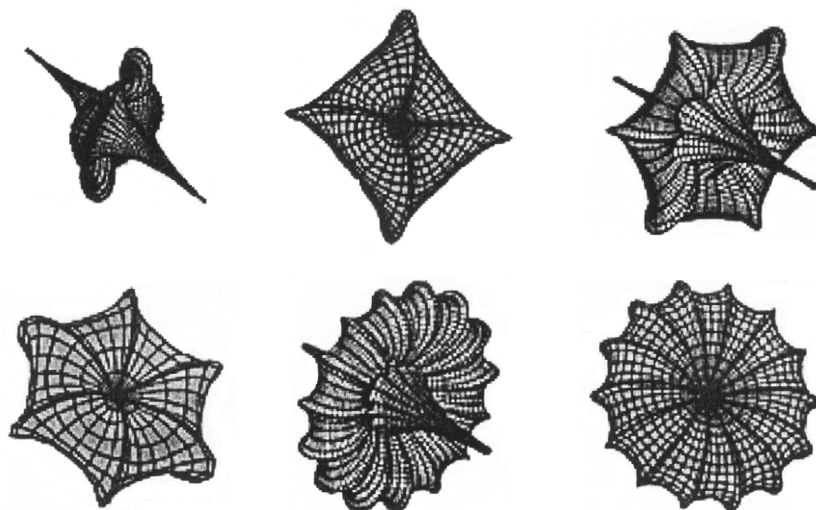


Рис. 7

7. Геометрическая интерпретация нелинейных уравнений современной математической физики

Обратимся к рассмотрению дифференциальной квадратичной формы типа (1) с коэффициентами $E[z(u, v)]$, $F[z(u, v)]$, $G[z(u, v)]$, зависящими известным образом от некоторой неизвестной функции $z = z(u, v)$ и её производных. Рассмотрим формулу Гаусса (4) для вычисления кривизны K формы (1) с имеющимися коэффициентами. Правая часть соотношения (4) представляет собой известное выражение для кривизны K через E , F , G и их производные по u и v до второго порядка включительно. Если считать кривизну K априори заданной функцией (в интересующем нас случае $K \equiv -1$), то, очевидно, соотношение типа (4) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для функции $z(u, v)$.

Таким образом, можно говорить, что псевдосферическая метрика (1) с рассматриваемыми коэффициентами порождает некоторое дифференциальное уравнение

$$\mathcal{F}[z(u, v)] = 0. \quad (15)$$

Верно и обратное: в соответствии с описанной выше методикой всякое регулярное решение $z(u, v)$ уравнения (15) определяет псевдосферическую метрику.

Приведём примеры псевдосферических метрик и ассоциированных с ними известных нелинейных уравнений:

1) метрика

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos z(u, v) du dv + dv^2,$$

уравнение синус-Гордона

$$z_{uv} = \sin z;$$

2) метрика

$$ds^2 = du^2 + (z^2 + 2) du dv + \left[z_u^2 + \left(\frac{z^2}{2} + 1 \right)^2 \right] dv^2;$$

модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза

$$z_v - \frac{3}{2} z^2 z_u - z_{uuu} = 0;$$

3) метрика

$$ds^2 = \frac{e^z}{2} (du^2 + dv^2),$$

уравнение Лиувилля

$$z_{uu} + z_{vv} = e^z.$$

Говорят, что дифференциальное уравнение принадлежит Λ^2 -классу (или является Λ^2 -уравнением), если оно порождается указанным выше способом псевдосферической метрикой.

Уравнения, принадлежащие Λ^2 -классу, обладают общими метрическими свойствами в рамках геометрии Лобачевского, которая универсально объясняет многие фундаментальные свойства нелинейных уравнений: преобразование Бэклунда, наличие бесконечного числа законов сохранения, интегрируемость методом обратной задачи рассеяния, существование солитонных решений, связь с трансцендентными функциями Пенлеве и др. Исследованию отмеченных проблем был посвящён последний творческий период в жизни профессора Э. Г. Позняка. Перспективы предложенного геометрического подхода к изучению нелинейных дифференциальных уравнений обсуждаются в работах [3–5].

Литература

- [1] Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г., Попов А. Г. Геометрия Лобачевского: открытие и путь в современность // Природа. — 1993. — № 7. — С. 19–27.
- [2] Позняк Э. Г. О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны // ДАН СССР. — 1966. — Т. 170, № 4. — С. 786–789.
- [3] Позняк Э. Г., Попов А. Г. Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика. — М.: Знание, 1991.
- [4] Позняк Э. Г., Попов А. Г. Геометрия Лобачевского и уравнения математической физики // Докл. РАН. — 1993. — Т. 332, № 4. — С. 418–421.

- [5] Позняк Э. Г., Попов А. Г. Неевклидова геометрия. Формула Гаусса и интерпретация дифференциальных уравнений в частных производных // Геометрия-2. Итоги науки и техн. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 2002. — С. 5—23.
- [6] Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 384 с.
- [7] Рождественский Б. Л. Система квазилинейных уравнений теории поверхностей // ДАН СССР. — 1962. — Т. 143, № 1. — С. 132—135.
- [8] Розендорн Э. Р. Поверхности отрицательной кривизны // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 48. — М.: ВИНТИ, 1989. — С. 98—195.
- [9] Чебышёв П. Л. О кройке одежды // Успехи мат. наук. — 1946. — Т. 1, № 2. — С. 38—42.
- [10] Beltrami E. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo superficie pseudosferiche // Giorn. Math. — 1872. — Vol. 10, Opera 2. — P. 12—16.
- [11] Bianchi L. Lezioni di geometria differenziale. — Bologna, 1927.
- [12] Minding F. Über die Biegung krummer Flächen // J. Reine Angew. Math. — 1838. — Vol. 18. — P. 365—368.

