Объектно-ориентированное представление иерархических графов*

А. Е. ПЕНТУС, М. Р. ПЕНТУС
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: apentus@mech.math.msu.su

УДК 519.179+519.682.1

Ключевые слова: графы, иерархические системы, имитационные модели.

Аннотация

В статье вводится понятие C_0-системы, предназначенное для представления синтаксических объектов формальных систем с наследованием, основанных на графах.

Abstract

A. E. Pentus, M. R. Pentus, Object-oriented representation of hierarchical graphs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 4, pp. 159—170.

We introduce the concept of C_0-systems, which can be used to represent syntactic objects of graph-based formal systems with inheritance.

1. Введение. При создании программных комплексов, моделирующих сложные системы, широко используются сети Петри, введённые в [5], и их различные варианты (см. [4]), «диаграммы состояний» (statecharts), введённые Харелом (см. [2, 3]), и другие формализмы, основанные на графах. Для создания интерактивных программных средств редактирования и исполнения этих имитационных моделей важно удачно выбрать синтаксическое представление иерархических графов.

Являясь отражением реальных объектов, иерархические графы часто содержат большое количество почти идентичных частей. Информацию о том, какие части должны оставаться идентичными в течение (постепенного) редактирования модели, необходимо отразить в самой модели. Цель данной статьи — развить «объектно-ориентированный» механизм, разработанный в [1], и включить в него понятие (множественного) наследования классов.

C_0-системы, вводимые в данной статье, в какой-то мере подобны системам классов в объектно-ориентированном программировании. Из этой аналогии проистекают обозначения в статье: C — множество всех классов, O — множество всех объектов, $\texttt{fields}(c)$ — множество полей (атрибутов) класса c, $\texttt{base}(c)$ — множество непосредственных надклассов класса c.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ и гранта для поддержки ведущих научных школ.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 4, с. 159—170.

2. Используемые термины и обозначения. Напомним некоторые понятия и термины, которые мы будем применять в этой статье.

Пусть V — множество. Обозначим $\mathcal{P}(V)$ множество всех его подмножеств, V^* — множество всех конечных последовательностей элементов V.

Назовём пару множеств $\langle V, E\rangle$, где $E \subseteq V \times V$, *ориентированным графом*, а пару $\langle V, E\rangle$, где E — множество неупорядоченных пар элементов V, — *неориентированным графом*. Элементы множества V будем называть *вершинами*, а элементы множества E — *рёбрами* графа.

Для двух элементов $u, v \in V$ под *путём из u в v в ориентированном графе* $\langle V, E\rangle$ будем понимать последовательность $(u = v_0, v_1, \ldots, v_n = v) \in V^*$, такую что для любого $i < n$ пара (v_i, v_{i+1}) есть ребро графа. *Деревом* назовём тройку $\langle V, E, r\rangle$, где $\langle V, E\rangle$ есть ориентированный граф, r — элемент множества V и для любого элемента v множества V существует единственный путь из r в v.

Ориентированный граф назовём *ацикличным*, если в нём нет циклов, т. е. таких путей $(v_0, \ldots, v_n)$, где $n \geqslant 1$ и $v_0 = v_n$.

3. C_0-система. Введём понятие C_0-системы. Пусть C — конечное множество, $\mathtt{base}$, $\mathtt{own\_fields}$ и $\mathtt{fields}$ — функции из множества C в множество $\mathcal{P}(C)$, $\mathtt{own\_connections}$ и $\mathtt{connections}$ — подмножества множества $C \times C \times C \times C \times C$, $\langle C, \mathtt{friends}\rangle$ — неориентированный граф. Структуру $\mathcal{C} = \langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle$ назовём C_0-*системой*, если выполнены следующие условия.

- Ориентированный граф $\langle C, \{(c, b) \mid b \in \mathtt{base}(c)\}\rangle$ является ацикличным.
- Если $b \in \mathtt{base}(c)$ и $\{b, d\} \in \mathtt{friends}$, то $\{c, d\} \in \mathtt{friends}$.
- Если $b \in \mathtt{base}(c)$, то $\mathtt{fields}(b) \subseteq \mathtt{fields}(c)$.
- $\mathtt{own\_fields}(c) = \{f \in \mathtt{fields}(c) \mid (\forall b \in \mathtt{base}(c))\, f \notin \mathtt{fields}(b)\}$.
- Если $c_1 \neq c_2$, то $\mathtt{own\_fields}(c_1) \cap \mathtt{own\_fields}(c_2) = \varnothing$.
- Если $(c, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{connections}$, то $(c, g_1, g_2, f_1, f_2) \in \mathtt{connections}$, $f_1 \in \mathtt{fields}(c)$, $f_2 \in \mathtt{fields}(f_1)$, $g_1 \in \mathtt{fields}(c)$, $g_2 \in \mathtt{fields}(g_1)$, $\{f_2, g_2\} \in \mathtt{friends}$.
- Если $b \in \mathtt{base}(c)$ и $(b, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{connections}$, то имеет место $(c, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{connections}$.
- Условие $(c, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{own\_connections}$ выполняется тогда и только тогда, когда $(c, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{connections}$ и для каждого $b \in \mathtt{base}(c)$ имеет место $(b, f_1, f_2, g_1, g_2) \notin \mathtt{connections}$.
- Если выполнены условия $(c_1, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{own\_connections}$ и $(c_2, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{own\_connections}$, то $c_1 = c_2$.

Элементы множества C называются *классами*.

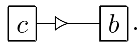
Заметим, что если

$$\langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle$$

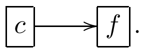
является C_0-системой, то $\mathtt{fields}$ и $\mathtt{connections}$ однозначно восстанавливаются по $\mathtt{base}$, $\mathtt{own\_fields}$ и $\mathtt{own\_connections}$.

Для изображения C_0-систем можно использовать диаграммы. Будем обозначать прямоугольниками элементы множества C. Если $\{c, d\} \in \mathtt{friends}$, отметим это на диаграмме как

Если $b \in \mathtt{base}(c)$, изобразим

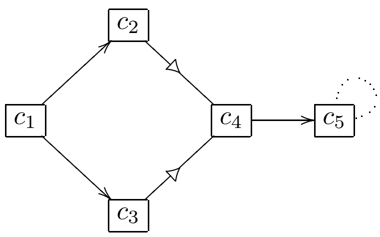


Если $f \in \mathtt{own\_fields}(c)$, изобразим



Элементы `own_connections` будем выписывать под диаграммой.

Вот пример C_0-системы:



$$(c_1, c_2, c_5, c_3, c_5) \in \mathtt{own\_connections}.$$

Как видно из диаграммы, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, $\mathtt{fields}(c_1) = \{c_2, c_3\}$, $\mathtt{fields}(c_4) = \{c_5\}$, $\mathtt{fields}(c_2) = \mathtt{fields}(c_3) = \mathtt{fields}(c_5) = \varnothing$, $\mathtt{friends} = \{\{c_5, c_5\}\}$.

Скажем, что C_0-система

$$\mathcal{C} = \langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle$$

является *подсистемой* C_0-системы

$$\mathcal{C}' = \langle C', \mathtt{base}', \mathtt{own\_fields}', \mathtt{fields}', \mathtt{own\_connections}', \mathtt{connections}', \mathtt{friends}'\rangle,$$

если

- $C \subseteq C'$,
- $(\forall c \in C)\, \mathtt{base}(c) = \mathtt{base}'(c)$,
- $(\forall c \in C)\, \mathtt{own\_fields}(c) = \mathtt{own\_fields}'(c)$,
- $\mathtt{own\_connections} = \{(c, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{own\_connections}' \mid c \in C\}$,
- $\mathtt{friends} = \{\{c, d\} \in \mathtt{friends}' \mid c \in C$ или $d \in C\}$.

Для фиксированной C_0-системы $\mathcal{C}$ определим отношение Q на множестве C. Если $c, d \in C$, то будем считать, что $c\ Q\ d$, если $d \in \mathtt{base}(c) \cup \mathtt{own\_fields}(c)$. (Стрелки —▷— и $\longrightarrow$ на диаграмме C_0-системы изображают именно отношение Q.) Будем говорить, что данная C_0-система *ациклична*, если граф $\langle C, Q\rangle$ ацикличен.

4. O_0-система. Теперь введём понятие O_0-системы. O_0-*система* $\mathcal{O}$ есть структура

$$\langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}, \\ O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}\rangle,$$

где $\langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle$ есть C_0-система, $\langle O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}\rangle$ — дерево, $\mathtt{class}$ — функция из множества O в множество C, $\langle O, \mathtt{neighbours}\rangle$ — неориентированный граф, причём выполняются следующие условия:

- для любого элемента $s \in O$ и любого элемента $f \in \mathtt{fields}(\mathtt{class}(s))$ найдётся единственный элемент $o \in O$, такой что $(s, o) \in \mathtt{subnode}$ и $\mathtt{class}(o) = f$,
- для элементов $s, o \in O$, таких что $(s, o) \in \mathtt{subnode}$, верно, что $\mathtt{class}(o) \in \in \mathtt{fields}(\mathtt{class}(s))$,
- пара элементов $r, s \in O$ принадлежит множеству $\mathtt{neighbours}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $o, r_1, s_1 \in O$, что $\{(o, r_1), (r_1, r), (o, s_1), (s_1, s)\} \subseteq \mathtt{subnode}$ и
$$(\mathtt{class}(o), \mathtt{class}(r_1), \mathtt{class}(r), \mathtt{class}(s_1), \mathtt{class}(s)) \in \mathtt{connections}.$$

Элементы множества O называются *объектами*.

Будем говорить, что O_0-система

$$\langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}, \\ O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}\rangle$$

надстроена над C_0-системой

$$\langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle.$$

Для изображения O_0-систем можно использовать диаграммы. Элементы множества O будут обозначаться кружочками, метка в кружочке, обозначающем o, указывает $\mathtt{class}(o)$. Если $(o_1, o_2) \in \mathtt{subnode}$, $\mathtt{class}(o_1) = c_1$ и $\mathtt{class}(o_2) = c_2$, то отметим это на диаграмме как

$$c_1 \longrightarrow c_2.$$

Если $\{o_1, o_2\} \in \mathtt{neighbours}$, $\mathtt{class}(o_1) = c_1$ и $\mathtt{class}(o_2) = c_2$, то изобразим

$$c_1 \rightsquigarrow c_2.$$

Диаграмма для O_0-системы, надстроенной над C_0-системой из примера пункта 3, выглядит так:

$$\begin{tikzcd}
 & c_2 \arrow[r] & c_5 \arrow[dd, squiggly, dash] \\
c_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & c_3 \arrow[r] & c_5
\end{tikzcd} .$$

Приведённая O_0-система могла бы служить моделью, например, для следующей ситуации: локальная компьютерная сеть (c_1) состоит из двух одинаковых компьютеров (c_2 и c_3), каждый из которых имеет один порт (c_5); порты этих двух компьютеров соединены друг с другом.

Назовём O_0-систему *конечной*, если множество O конечно.

Скажем, что O_0-системы O_1 и O_2 *изоморфны*, если существуют две биекции $C_1 \to C_2$, $O_1 \to O_2$, сохраняющие сигнатурные функции и предикаты

$$\mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}, \\ \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}.$$

5. Теорема.

1. *Для любой* C_0*-системы*

   $$\mathcal{C} = \langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle$$

   и любого элемента $c \in C$ *существует единственная* (*с точностью до изоморфизма*) *надстроенная над ней* O_0*-система*

   $$\mathcal{O} = \langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}, \\ O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}\rangle,$$

   такая что $\mathtt{class}(\mathtt{root}) = c$.
2. *Если* C_0*-система ациклична, то построенная по ней* O_0*-система* $\mathcal{O}$ *конечна.*

Доказательство. Чтобы доказать, что искомая O_0-система существует, построим O_0-систему

$$\mathcal{O}_\star = \langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}, \\ O_\star, \mathtt{subnode}_\star, \mathtt{root}_\star, \mathtt{class}_\star, \mathtt{neighbours}_\star\rangle$$

с указанными свойствами.

Положим

$$R = \{(d, e) \in C \times C \mid e \in \mathtt{fields}(d)\}.$$

Определим $O_\star$ как множество всех путей в ориентированном графе $\langle C, R\rangle$, выходящих из c. Положим

$$\mathtt{subnode}_\star = \{((d_0, \dots, d_n), (d_0, \dots, d_n, d_{n+1})) \mid n \geqslant 0,\ (d_0, \dots, d_n, d_{n+1}) \in O_\star\},$$
$$\mathtt{root}_\star = (c),$$
$$\mathtt{class}_\star(d_0, \dots, d_n) = d_n.$$

Множество $\mathtt{neighbours}_\star$ определяется по $O_\star$ так, как это требуется в определении O_0-системы.

Легко убедиться, что $\mathcal{O}_\star$ действительно является O_0-системой и удовлетворяет требованиям теоремы.

Докажем единственность O_0-системы $\mathcal{O}_\star$ с точностью до изоморфизма. Пусть нашлась другая O_0-система

$$\mathcal{O} = \langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}, \\ O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}\rangle$$

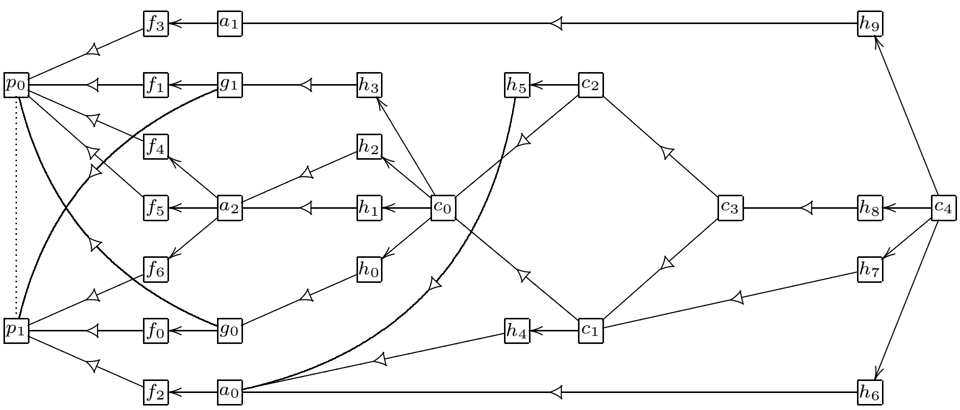
с указанными свойствами. Построим изоморфизм O_0-систем $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_\star$. Для множества C можно рассмотреть тождественное отображение. Осталось построить биекцию φ из множества O в множество $O_\star$.

Рассмотрим произвольный элемент $o \in O$. Пусть $(o_0, \ldots, o_n)$ — путь из вершины `root` в вершину o в ориентированном графе $\langle O, \mathtt{subnode}\rangle$ (так как $\langle O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}\rangle$ — дерево, то существует единственный такой путь). Положим $\varphi(o) = (\mathtt{class}(o_0), \ldots, \mathtt{class}(o_n))$. Нетрудно проверить, что при таком определении отображений на множествах C и O мы действительно имеем изоморфизм O_0-систем $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_\star$.

Для доказательства второй части теоремы достаточно убедиться, что C_0-система $\mathcal{C}$ ациклична тогда и только тогда, когда граф $\langle C, R\rangle$ ацикличен. Тогда из конечности множества C следует, что множество $O_\star$ конечно, и поэтому O_0-система $\mathcal{O}_\star$ конечна. □

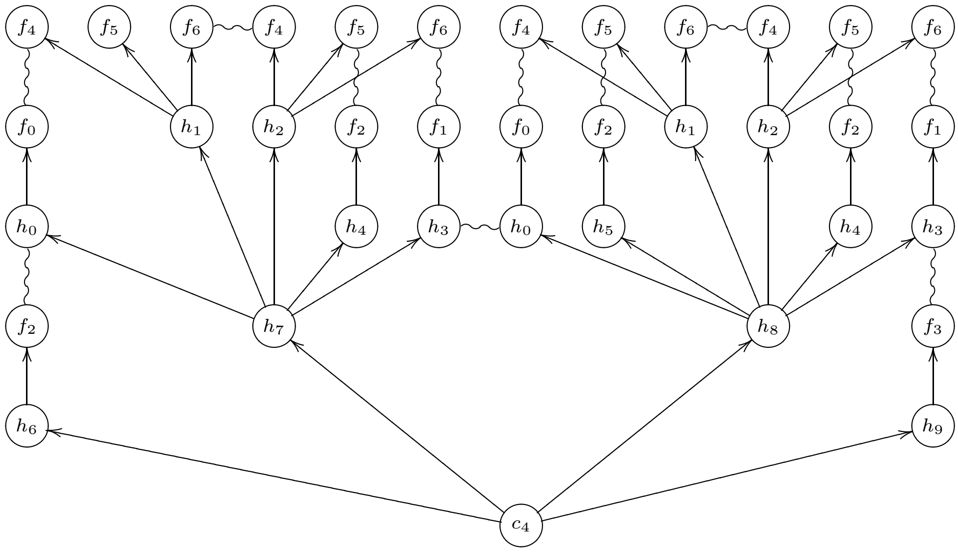
6. Пример.

Рассмотрим следующую C_0-систему:



$$\mathtt{own\_connections} = \{(c_0, h_0, f_0, h_1, f_4), (c_0, h_1, f_6, h_2, f_4), (c_0, h_2, f_6, h_3, f_1), \\ (c_1, h_4, f_2, h_2, f_5), (c_2, h_5, f_2, h_1, f_5), \\ (c_4, h_6, f_2, h_7, h_0), (c_4, h_7, h_3, h_8, h_0), (c_4, h_8, h_3, h_9, f_3)\}.$$

Надстроенная над ней O_0-система, где $\mathtt{class}(\mathtt{root}) = c_4$, изображена на следующей диаграмме.



7. С-системы. В [1] были введены С-системы, О-системы и нормальные С-системы. В них не моделируется понятие наследования (в C_0-системах наследование реализовано посредством функции base). В этом разделе мы покажем, что понятие C_0-системы является естественным обобщением понятия нормальной С-системы.

Будем говорить, что О-система

$$\langle C, F, \mathtt{fields}, \mathtt{type}, \mathtt{friends}, \mathtt{connections}, \\ O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{label}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}\rangle$$

и O_0-система

$$\langle C_0, \mathtt{base}_0, \mathtt{own\_fields}_0, \mathtt{fields}_0, \mathtt{own\_connections}_0, \mathtt{connections}_0, \mathtt{friends}_0, \\ O_0, \mathtt{subnode}_0, \mathtt{root}_0, \mathtt{class}_0, \mathtt{neighbours}_0\rangle$$

согласованы друг с другом, если $O = O_0$, $\mathtt{subnode} = \mathtt{subnode}_0$, $\mathtt{root} = \mathtt{root}_0$, $\mathtt{neighbours} = \mathtt{neighbours}_0$.

Будем говорить, что С-система $\mathcal{C}$ и C_0-система $\mathcal{C}_0$ *согласованы* друг с другом, если каждая О-система, надстроенная над $\mathcal{C}$, согласована с некоторой O_0-системой, надстроенной над $\mathcal{C}_0$.

Для сравнивания размеров C_0-систем введём функцию μ_0, ставящую в соответствие каждой C_0-системе

$$\langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle$$

число

$$|C| + \sum_{c\in C} |\mathtt{base}(c)| + \sum_{c\in C} |\mathtt{own\_fields}(c)| + |\mathtt{own\_connections}| + |\mathtt{friends}|.$$

Для С-систем введём аналогичную функцию μ, ставящую в соответствие каждой С-системе

$$\langle C, F, \mathtt{fields}, \mathtt{type}, \mathtt{friends}, \mathtt{connections}\rangle$$

число

$$|C| + |F| + \sum_{c\in C} |\mathtt{fields}(c)| + |\Gamma_{\mathtt{type}}| + |\mathtt{friends}| + \sum_{c\in C} |\mathtt{connections}(c)|,$$

где $\Gamma_{\mathtt{type}}$ обозначает график функции $\mathtt{type}$.

8. Теорема. *Каждая нормальная* С*-система* $\mathcal{C}$ *согласована с некоторой* C_0*-системой* $\mathcal{C}_0$*, такой что* $\mu_0(\mathcal{C}_0) \leqslant \mu(\mathcal{C})$.

Доказательство. На самом деле мы докажем, что имеет место равенство $\mu_0(\mathcal{C}_0) = \mu(\mathcal{C})$. Пусть дана нормальная С-система

$$\langle C, F, \mathtt{fields}, \mathtt{type}, \mathtt{friends}, \mathtt{connections}\rangle.$$

Без ограничения общности можно предположить, что $C \cap F = \varnothing$. Построим искомую C_0-систему следующим образом. Положим

$$C_0 = C \cup F,$$
$$\mathtt{friends}_0 = \mathtt{friends},$$
$$\mathtt{own\_connections}_0 = \\ = \{(c, f_1, f_2, g_1, g_2) \mid c \in C, ((f_1, f_2), (g_1, g_2)) \in \mathtt{connections}(c)\},$$
$$\mathtt{connections}_0 = \mathtt{own\_connections}_0 \cup \\ \cup \{(f, f_1, f_2, g_1, g_2) \mid f \in F, ((f_1, f_2), (g_1, g_2)) \in \mathtt{connections}(\mathtt{type}(f))\}.$$

Для каждого $c \in C_0$ положим

$$\mathtt{base}_0(c) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } c \in C, \\ \{\mathtt{type}(c)\}, & \text{если } c \in F, \end{cases}$$

$$\mathtt{own\_fields}_0(c) = \begin{cases} \mathtt{fields}(c), & \text{если } c \in C, \\ \varnothing, & \text{если } c \in F, \end{cases}$$

$$\mathtt{fields}_0(c) = \begin{cases} \mathtt{fields}(c), & \text{если } c \in C, \\ \mathtt{fields}(\mathtt{type}(c)), & \text{если } c \in F. \end{cases}$$

Очевидно, $|C_0| = |C| + |F|$, $\sum\limits_{c\in C_0} |\mathtt{base}(c)| = |\Gamma_{\mathtt{type}}|$, $|\mathtt{friends}_0| = |\mathtt{friends}|$, $\sum\limits_{c\in C_0} |\mathtt{own\_fields}(c)| = \sum\limits_{c\in C} |\mathtt{fields}(c)|$, $|\mathtt{own\_connections}_0| = \sum\limits_{c\in C} |\mathtt{connections}(c)|$. Следовательно, $\mu_0(\mathcal{C}_0) = \mu(\mathcal{C})$.

Для каждой О-системы

$$\langle C, F, \mathtt{fields}, \mathtt{type}, \mathtt{friends}, \mathtt{connections}, \\ O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{label}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}\rangle,$$

надстроенной над $\mathcal{C}$, можно построить надстроенную над $\mathcal{C}_0$ O_0-систему

$$\langle C_0, \mathtt{base}_0, \mathtt{own\_fields}_0, \mathtt{fields}_0, \mathtt{own\_connections}_0, \mathtt{connections}_0, \mathtt{friends}_0, O_0, \mathtt{subnode}_0, \mathtt{root}_0, \mathtt{class}_0, \mathtt{neighbours}_0\rangle,$$

такую что $\mathtt{class}_0(\mathtt{root}_0) = \mathtt{class}(\mathtt{root})$. Легко убедиться, что построенная O_0-система согласована с исходной O-системой.

9. Теорема. *Каждая* C_0*-система* $\mathcal{C}_0$ *согласована с некоторой нормальной* C*-системой* $\mathcal{C}$*, такой что* $\mu(\mathcal{C}) \leqslant \mu_0(\mathcal{C}_0)^2$.

Доказательство. Пусть дана C_0-система

$$\langle C_0, \mathtt{base}_0, \mathtt{own\_fields}_0, \mathtt{fields}_0, \mathtt{own\_connections}_0, \mathtt{connections}_0, \mathtt{friends}_0\rangle.$$

Построим искомую C-систему следующим образом. Положим

$$C = C_0,$$
$$F = \bigcup_{c \in C_0} \mathtt{own\_fields}_0(c),$$
$$\mathtt{friends} = \mathtt{friends}_0.$$

Для каждого $f \in F$ положим

$$\mathtt{type}(f) = f.$$

Для каждого $c \in C$ положим

$$\mathtt{fields}(c) = \mathtt{fields}_0(c),$$
$$\mathtt{connections}(c) = \{((f_1, f_2), (g_1, g_2)) \mid (c, f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathtt{connections}_0\}.$$

Обозначим $k = \sum\limits_{c \in C_0} |\mathtt{own\_fields}_0(c)|$ и $m = \sum\limits_{c \in C_0} |\mathtt{base}(c)|$. Очевидно, $|C| = |C_0|$, $|F| \leqslant k$, $\sum\limits_{c \in C} |\mathtt{fields}(c)| = \sum\limits_{c \in C_0} |\mathtt{fields}_0(c)| \leqslant (m+1)k$, $\sum\limits_{c \in C} |\mathtt{connections}(c)| = |\mathtt{connections}_0| \leqslant (m+1)|\mathtt{own\_connections}_0|$, $|\Gamma_{\mathtt{type}}| = |F| \leqslant k$, $|\mathtt{friends}| = |\mathtt{friends}_0|$. В случае $|C| = 1$ имеем $m = 0$ и

$$\mu(\mathcal{C}) = 1 + 3k + |\mathtt{friends}_0| + |\mathtt{own\_connections}_0| \leqslant \leqslant (1 + k + |\mathtt{friends}_0| + |\mathtt{own\_connections}_0|)^2 = \mu_0(\mathcal{C}_0)^2.$$

В случае $|C| \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{C}) &\leqslant |C_0| + k + (m+1)k + k + |\mathtt{friends}_0| + (m+1)|\mathtt{own\_connections}_0| \leqslant \\ &\leqslant |C_0| + |\mathtt{friends}_0| + (m+1)|\mathtt{own\_connections}_0| + (m+k+2)k \leqslant \\ &\leqslant (m+k+2)(|C_0| + |\mathtt{friends}_0| + |\mathtt{own\_connections}_0| + k) \leqslant \\ &\leqslant \mu_0(\mathcal{C}_0)\mu_0(\mathcal{C}_0).\end{aligned}$$

Для каждой O_0-системы

$$\langle C_0, \mathtt{base}_0, \mathtt{own\_fields}_0, \mathtt{fields}_0, \mathtt{own\_connections}_0, \mathtt{connections}_0, \mathtt{friends}_0, O_0, \mathtt{subnode}_0, \mathtt{root}_0, \mathtt{class}_0, \mathtt{neighbours}_0\rangle,$$

надстроенной над $\mathcal{C}_0$, можно построить надстроенную над $\mathcal{C}$ О-систему

$$\langle C, F, \mathtt{fields}, \mathtt{type}, \mathtt{friends}, \mathtt{connections},\\ O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{label}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}\rangle,$$

такую что $\mathtt{class}(\mathtt{root}) = \mathtt{class}_0(\mathtt{root}_0)$. Легко убедиться, что построенная О-система согласована с исходной O_0-системой. $\square$

10. Теорема. *Для каждого натурального числа n существует такая C_0-система $\mathcal{C}_0$, что $\mu_0(\mathcal{C}_0) > n$ и для любой согласованной с ней С-системы $\mathcal{C}$ выполняется неравенство $\mu(\mathcal{C}) > \frac{1}{17}\mu_0(\mathcal{C}_0)^2$.*

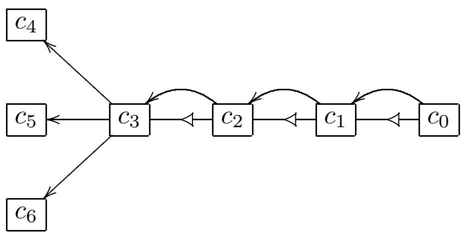
Доказательство. Построим искомую C_0-систему

$$\mathcal{C}_0 = \langle C_0, \mathtt{base}_0, \mathtt{own\_fields}_0, \mathtt{fields}_0,\\ \mathtt{own\_connections}_0, \mathtt{connections}_0, \mathtt{friends}_0\rangle,$$

положив

$$\begin{aligned}
&C_0 = \{c_0, \ldots, c_{2n}\},\\
&\mathtt{base}_0(c_i) = \{c_{i+1}\} \text{ для каждого } i < n,\\
&\mathtt{base}_0(c_i) = \varnothing \text{ для каждого } i \geqslant n,\\
&\mathtt{own_fields}_0(c_i) = \{c_{i+1}\} \text{ для каждого } i < n,\\
&\mathtt{own_fields}_0(c_n) = \{c_{n+1}, \ldots c_{2n}\},\\
&\mathtt{own_fields}_0(c_i) = \varnothing \text{ для каждого } i > n,\\
&\mathtt{fields}_0(c_i) = \{c_{i+1}, \ldots c_{2n}\} \text{ для каждого } i \leqslant n,\\
&\mathtt{fields}_0(c_i) = \varnothing \text{ для каждого } i > n,\\
&\mathtt{own_connections}_0 = \mathtt{connections}_0 = \mathtt{friends}_0 = \varnothing.
\end{aligned}$$

Например, при $n = 3$ эта C_0-система выглядит следующим образом:



.

Очевидно, $\mu_0(\mathcal{C}_0) = 5n + 1$. Рассмотрим надстроенную над $\mathcal{C}_0$ O_0-систему

$$\langle C_0, \mathtt{base}_0, \mathtt{own\_fields}_0, \mathtt{fields}_0, \mathtt{own\_connections}_0, \mathtt{connections}_0, \mathtt{friends}_0,\\ O_0, \mathtt{subnode}_0, \mathtt{root}_0, \mathtt{class}_0, \mathtt{neighbours}_0\rangle,$$

такую что $\mathtt{class}_0(\mathtt{root}_0) = c_0$. Индукцией по i можно доказать, что для каждого $i \leqslant n$ найдётся такой элемент $o \in O_0$, что $\mathtt{class}_0(o) = c_i$. Следовательно, для каждого $i \leqslant n$ найдётся такой элемент $o \in O_0$, что $|\{s \in O_0 \mid (o, s) \in \mathtt{subnode}_0\}| = 2n - i$.

Пусть некоторая С-система $\mathcal{C}$ согласована с $\mathcal{C}_0$. По определению согласованности найдётся О-система

$$\langle C, F, \mathtt{fields}, \mathtt{type}, \mathtt{friends}, \mathtt{connections}, \\ O, \mathtt{subnode}, \mathtt{root}, \mathtt{label}, \mathtt{class}, \mathtt{neighbours}\rangle,$$

надстроенная над $\mathcal{C}$ и согласованная с рассматриваемой O_0-системой. Очевидно, для каждого $i \leqslant n$ найдётся такой элемент $o \in O$, что $|\{s \in O \mid (o,s) \in \mathtt{subnode}\}| = 2n - i$. Легко убедиться, что $|C| \geqslant n+2$, $|F| \geqslant 2n$, $|\Gamma_{\mathtt{type}}| \geqslant 2n$, $\sum\limits_{c \in C} |\mathtt{fields}(c)| \geqslant \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} (2n - i) = \frac{3}{2}(n^2 + n)$. Получаем, что $\mu(\mathcal{C}) \geqslant (n+2) + 2n + 2n + \frac{3}{2}(n^2+n) = \frac{1}{34}(51n^2 + 221n + 68) > \frac{1}{17}(5n+1)^2$. $\square$

11. Заключение. Введённое в данной статье понятие C_0-системы способно эмулировать различные формализмы, моделирующие сложные системы с помощью «иерархических графов» и наследования. При необходимости в C_0-системе можно выразить требование идентичности нескольких частей модели или требование наследования одной частью структуры другой части. Это позволяет основанным на C_0-системах интерактивным средствам создания и редактирования моделей автоматически вносить изменения одновременно во многие (необязательно идентичные) части модели.

Операцию удаления можно определить следующим образом. Даны C_0-система

$$\mathcal{C} = \langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle$$

и класс $c_1 \in C$. Результатом удаления c_1 называется C_0-система $\mathcal{C}'$, полученная из $\mathcal{C}$ стиранием всех классов, достижимых из c_1 в ориентированном графе $\langle C, Q_{\mathrm{delete}}\rangle$, где $Q_{\mathrm{delete}} = \{(d,e) \in C \times C \mid e \in \mathtt{own\_fields}(d)$ или $d \in \mathtt{base}(e)\}$.

Операцию копирования можно определить следующим образом. Даны C_0-система

$$\mathcal{C} = \langle C, \mathtt{base}, \mathtt{own\_fields}, \mathtt{fields}, \mathtt{own\_connections}, \mathtt{connections}, \mathtt{friends}\rangle$$

и классы $c_1, c_2 \in C$. Результатом копирования всех полей класса c_1 в класс c_2 называется C_0-система $\mathcal{C}'$, полученная из $\mathcal{C}$ добавлением в C и в $\mathtt{own\_fields}(c_2)$ копий всех классов, достижимых из $\mathtt{fields}(c_1)$ в ориентированном графе $\langle C, Q_{\mathrm{copy}}\rangle$, где $Q_{\mathrm{copy}} = \{(d,e) \in C \times C \mid e \in \mathtt{own\_fields}(d)\}$. При этом значения функции `base` на новых классах содержат только старые классы, а значения функции `own_fields` на новых классах содержат только новые классы.

Литература

[1] Пентус А. Е., Пентус М. Р. Объектно-ориентированное представление иерархических сетей Петри // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 831—840.

[2] Harel D. Statecharts: a visual formalism for complex systems // Sci. Comput. Programming. — 1987. — Vol. 8. — P. 231—274.

[3] Harel D. On visual formalisms // Comm. ACM. — 1988. — Vol. 31. — P. 514—530.

[4] Oswald H., Esser R., Mattmann R. An environment for specifying and executing hierarchical Petri nets // IEEE 12th International Conference on Software Engineering, Nice. — IEEE, 1990.

[5] Petri C. A. Kommunikation mit Automaten. Schriften des IIM Nr. 2. — Bonn: Institut für Instrumentelle Mathematik, 1962.