

К классификации условно интегрируемых эволюционных систем в размерности $(1 + 1)^*$

А. СЕРГЕЕВ

Силезский университет, Опава
e-mail: Artur.Sergyeyev@math.slu.cz

УДК 517.95+514.763.85

Ключевые слова: точные решения, нелинейные эволюционные уравнения, условная интегрируемость, обобщённые симметрии, редукция, обобщённые условные симметрии.

Аннотация

В статье обобщены результаты Фокаса и Лью и найдены все $(1+1)$ -мерные локально аналитические эволюционные уравнения порядка n , допускающие решение типа суперпозиции N ударных волн с $N \leq n + 1$. Для этого нами была усовершенствована методика из нашей предыдущей статьи, в которой были полностью описаны все $(1+1)$ -мерные эволюционные системы вида $\mathbf{u}_t = \mathbf{F}(x, t, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}/\partial x, \dots, \partial^n\mathbf{u}/\partial x^n)$, условно инвариантные по отношению к данному обобщённому векторному полю (векторному полю Ли—Беклунда) $\mathbf{Q}(x, t, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}/\partial x, \dots, \partial^k\mathbf{u}/\partial x^k)\partial/\partial\mathbf{u}$, в предположении, что система ОДУ $\mathbf{Q} = 0$ вполне невырождена. Каждая такая эволюционная система допускает редукцию к системе ОДУ по t и, таким образом, является нелинейным аналогом квазиточнорешаемых моделей в квантовой механике.

Abstract

A. Sergyeyev, *On the classification of conditionally integrable evolution systems in $(1+1)$ dimensions*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 243–253.

We generalize earlier results of Fokas and Liu and find all locally analytic $(1+1)$ -dimensional evolution equations of order n that admit an N -shock-type solution with $N \leq n + 1$. For this, we develop a refinement of the technique from our earlier work, where we completely characterized all $(1+1)$ -dimensional evolution systems $\mathbf{u}_t = \mathbf{F}(x, t, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}/\partial x, \dots, \partial^n\mathbf{u}/\partial x^n)$ that are conditionally invariant under a given generalized (Lie—Bäcklund) vector field $\mathbf{Q}(x, t, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}/\partial x, \dots, \partial^k\mathbf{u}/\partial x^k)\partial/\partial\mathbf{u}$ under the assumption that the system of ODEs $\mathbf{Q} = 0$ is totally nondegenerate. Every such conditionally invariant evolution system admits a reduction to a system of ODEs in t , thus being a nonlinear counterpart to quasi-exactly solvable models in quantum mechanics.

*Работа поддержана грантом GAČR 201/04/0538, а также грантом MSM:J10/98:192400002 Министерства образования, молодёжи и спорта Чешской республики.

1. Введение

Для того чтобы математическая модель того или иного явления была адекватной, часто требуется, чтобы она допускала решения определённого вида (волновые решения, кинки, солитоны и т. д.). Как показали Фокас и Лью [7, 8] (см. также [15]), один из естественных способов добиться этого для эволюционных систем в размерности $(1 + 1)$ состоит в следующем. Нужно потребовать, чтобы рассматриваемая система допускала такую обобщённую условную симметрию (ОУС), что решения, инвариантные по отношению к этой симметрии, имеют желаемый вид.

Оказывается, что множество систем, допускающих ОУС (такие системы, или, ещё более общо, системы, обладающие интегрируемыми редукциями, часто называют *условно интегрируемыми*, см., например, [10]), намного больше множества систем, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния или прямой линеаризации (см., например, [7, 8]). Отметим также (см. [16]), что если $(1 + 1)$ -мерное эволюционное уравнение допускает редукцию к системе ОДУ по параметру эволюции (времени t), то оно обладает ОУС, и наоборот.

Естественно задаться вопросом: как описать все эволюционные системы, допускающие данную ОУС? Для линейных ОУС с не зависящими от времени коэффициентами эта задача, переформулированная в терминах так называемых инвариантных модулей, была решена в основополагающей статье [9] (см. также более раннюю важную работу [14]). Для нелинейных ОУС некоторые результаты в этом направлении были получены в [5], а для ОУС, удовлетворяющих определённым условиям невырожденности, эта задача была полностью решена в [13], подробнее см. ниже (см. также обзор ранее полученных результатов и обсуждение роли ОУС в поиске точных решений в [9] и [13]).

Однако полученные в [13] формулы не слишком удобны для практического применения. В настоящей статье мы приводим более удобные «альтернативные» формулы для локально аналитических $(1 + 1)$ -мерных эволюционных систем, инвариантных по отношению к заданной *аналитической* ОУС. Это сделано в разделе 4. В разделе 5 мы иллюстрируем применение наших результатов рядом примеров. В частности, мы находим все локально аналитические $(1 + 1)$ -мерные эволюционные уравнения, допускающие решение типа суперпозиции N ударных волн с $N \leq n + 1$.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим эволюционную систему

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), \quad n \geq 0, \quad (1)$$

для s -компонентной вектор-функции $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^s)^T$, где $\mathbf{u}_l = \partial^l \mathbf{u} / \partial x^l$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}$, а индекс T обозначает транспонированную матрицу.

Гладкая функция переменных $x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ называется *локальной* (см. [2]; ср. также [1, 3]), если она зависит только от конечного числа переменных \mathbf{u}_j . Наибольшее целое m , такое что $\partial f / \partial \mathbf{u}_m \neq 0$, называется *порядком* локальной функции f и обозначается $m = \text{ord } f$. Если f зависит только от x и t , то мы будем предполагать, что $\text{ord } f = 0$. Все функции, рассматриваемые ниже, считаются локальными, если явно не оговорено противное.

Обобщённое векторное поле $\mathcal{Q} = \mathbf{Q} \partial / \partial \mathbf{u}$, где \mathbf{Q} — s -компонентная локальная вектор-функция, называется [7, 8, 15] *обобщённой условной симметрией* (ОУС) для (1), если система $\mathbf{Q} = 0$ совместна с (1).

Система (1) совместна с $\mathbf{Q} = 0$ тогда и только тогда, когда (см., например, [7, 15])

$$D_t(\mathbf{Q})|_{\mathcal{M}} = 0, \quad (2)$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^{\infty} D^i(\mathbf{F}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} \quad \text{и} \quad D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{u}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} -$$

полные производные по t и x , а \mathcal{M} — это многообразие решений системы $\mathbf{Q} = 0$.

Ниже мы будем рассматривать $\mathbf{Q} = 0$ как систему ОДУ, включающую дополнительный параметр t , и будем предполагать, что эта система вполне невырождена, т. е. системы $D^j(\mathbf{Q}) = 0$ локально разрешимы и имеют максимальный ранг для всех $j = 0, 1, 2, \dots$ (подробнее см. [3, глава 2]). В таком случае условие (2) эквивалентно [3] следующему: существуют s -компонентные локальные вектор-функции $\boldsymbol{\eta}_{\alpha, j}$ и целое число p , такие что

$$D_t(\mathbf{Q}) = \sum_{\alpha=1}^s \sum_{j=0}^p \boldsymbol{\eta}_{\alpha, j} D^j(Q^\alpha). \quad (3)$$

Найти все ОУС, допускаемые данной системой (1) — это весьма сложная задача, сравнимая по своей трудности с задачей нахождения всех решений (1). Однако в [13] нам удалось полностью решить обратную задачу — описать все системы вида (1), допускающие заданную ОУС $\mathcal{Q} = \mathbf{Q} \partial / \partial \mathbf{u}$, при условии, что система $\mathbf{Q} = 0$, рассматриваемая как система ОДУ, является вполне невырожденной.

Напомним вкратце результаты [13]. Рассмотрим систему ОДУ

$$\mathbf{Q}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = 0, \quad (4)$$

включающую t как параметр. Здесь $\mathbf{Q} = (Q^1, \dots, Q^s)^T$ — это s -компонентная локальная вектор-функция.

Предположим, что общее решение системы (4) в неявном виде можно записать следующим образом:

$$\mathbf{G}(x, t, \mathbf{u}, c_1(t), \dots, c_N(t)) = 0. \quad (5)$$

Число N иногда называют суммарным порядком системы (4). Здесь и далее предполагается, что \mathbf{G} существенно зависит от всех N произвольных функций

$c_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, и что $\det \partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{u} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции мы можем, по крайней мере локально, записать общее решение системы (4) в явном виде: $\mathbf{u} = \mathbf{P}(x, t, c_1(t), \dots, c_N(t))$, откуда получаем

$$u_j^\alpha = \frac{\partial^j P^\alpha(x, t, c_1(t), \dots, c_N(t))}{\partial x^j}.$$

Используя эти формулы, можно выразить c_i как функции $x, t, u^1, \dots, u_{n_1-1}^1, \dots, u^s, \dots, u_{n_s-1}^s$ для некоторых n_1, \dots, n_s :

$$c_i = h_i(x, t, u^1, \dots, u_{n_1-1}^1, \dots, u^s, \dots, u_{n_s-1}^s), \quad i = 1, \dots, N.$$

Положим $\tilde{\mathbf{B}}_i = -(\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{u})^{-1} \partial \mathbf{G} / \partial c_i$, $\tilde{\mathbf{R}} = -(\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{u})^{-1} \partial \mathbf{G} / \partial t$, и пусть $\mathbf{B}_i = \tilde{\mathbf{B}}_i(x, t, h_1, \dots, h_N)$ и $\mathbf{R}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) \equiv \tilde{\mathbf{R}}(x, t, h_1, \dots, h_N)$, т. е. \mathbf{B}_i и \mathbf{R} получаются из $\tilde{\mathbf{B}}_i$ и $\tilde{\mathbf{R}}$ подстановкой h_i вместо c_i . Здесь предполагается, что c_i не дифференцируются по t при вычислении $\partial \mathbf{G} / \partial t$.

Пусть V — открытая область в пространстве \mathcal{V} переменных $x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots$, и пусть W — множество всех точек из V , удовлетворяющих уравнениям $D^j(\mathbf{Q}) = 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, рассматриваемым как алгебраические.

Теорема 1 ([13]). Пусть система $\mathbf{Q}(x, t, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}_k) = 0$, рассматриваемая как система ОДУ, аналитична на V , полностью невырождена на W и имеет одинаковый суммарный порядок N на всём W .

Если система $\mathbf{Q} = 0$ совместна с (1), т. е. $\mathbf{Q} \partial / \partial \mathbf{u}$ — ОУС для (1), то функция \mathbf{F} на V может быть представлена в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} + \sum_{i=1}^N \zeta_i(t, h_1, \dots, h_N) \mathbf{B}_i + \sum_{p=0}^m \sum_{\alpha=1}^s \chi_{p,\alpha}(t, x, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}_{j_{p,\alpha}}) D^p(Q^\alpha), \quad (6)$$

где m и $j_{p,\alpha}$ — неотрицательные целые числа, а ζ_i и $\chi_{p,\alpha}$ — гладкие функции своих аргументов.

Система $\mathbf{u}_t = \mathbf{F}$ с функцией \mathbf{F} вида (6) по построению [13] допускает решение того же вида, что и общее решение (5) системы $\mathbf{Q} = 0$, т. е.

$$\mathbf{G}(x, t, \mathbf{u}, c_1(t), \dots, c_N(t)) = 0,$$

однако здесь $c_i(t)$ уже не являются произвольными функциями t : они должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{dc_i}{dt} = \zeta_i(t, c_1, \dots, c_N), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Другими словами, если выполнены условия теоремы 1 и $\mathbf{Q} \partial / \partial \mathbf{u}$ является ОУС для $\mathbf{u}_t = \mathbf{F}$, то подстановка общего решения (5) системы $\mathbf{Q} = 0$ в систему $\mathbf{u}_t = \mathbf{F}$ сводит последнюю к системе ОДУ (7).

3. Решение обратной задачи: какие системы допускают данную ОУС?

Как выбрать среди функций F вида (6) те, которые имеют порядок $\leq n$, где n — заданное натуральное число? Для этого можно воспользоваться следующим результатом.

Теорема 2. Пусть Q удовлетворяет условиям теоремы 1. Предположим, что

$$Q^\alpha = u_{n_\alpha}^\alpha - g^\alpha(x, t, \tilde{u}), \quad (8)$$

где g^α — аналитические функции своих аргументов и $\tilde{u} = (u^1, \dots, u_{n_1-1}^1, \dots, u^s, \dots, u_{n_s-1}^s)$. Тогда наиболее общая локально аналитическая функция F порядка $n \geq \max(\text{ord } R, \max_{i=1, \dots, N} \text{ord } B_i, \max_{j=1, \dots, N} \text{ord } h_j)$, такая что система (1) совместна с $Q = 0$, локально представима в виде

$$\begin{aligned} F = & R + \sum_{i=1}^N \zeta_i(t, h_1, \dots, h_N) B_i + \\ & + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{m=0}^{n-n_\alpha} D^m(Q^\alpha) K_{\alpha, m}(x, t, \tilde{u}, Q^1, D(Q^1), \dots, D^{n-n_1}(Q^1), \dots, \\ & Q^s, D(Q^s), \dots, D^{n-n_s}(\tilde{Q}^s)), \end{aligned} \quad (9)$$

где $N = \sum_{\alpha=1}^s n_\alpha$, а ζ_i и $K_{\alpha, m}$ — произвольные локально аналитические функции своих аргументов, причём $K_{\alpha, m} \equiv 0$, если $n < n_\alpha$.

Доказательство. Имеем $u_{n_\alpha}^\alpha = Q^\alpha + g^\alpha(x, t, \tilde{u})$. По индукции получаем $u_j^\alpha = \psi_j^\alpha(x, t, \tilde{u}, Q^1, \dots, D^{j-n_1}(Q^1), \dots, Q^s, \dots, D^{j-n_s}(Q^s))$ для $j \geq \max_\alpha n_\alpha$ и аналогичные формулы для $\max_\alpha n_\alpha > j > n_\alpha$.

Подставим полученные формулы для u_j^α в (6) и разложим получившееся выражение в ряд Тейлора по переменным $D^j(Q^\alpha)$. Так как порядок F равен n и F локально аналитична, она не может зависеть от $D^j(Q^\alpha)$ при $j > n - n_\alpha$. Учитывая этот факт, мы можем представить (6) в виде (9), что и требовалось доказать. \square

Легко видеть, что наиболее общая локально аналитическая функция F порядка $n < \tilde{n} \equiv \max(\text{ord } R, \max_{i=1, \dots, N} \text{ord } B_i, \max_{j=1, \dots, N} \text{ord } h_j)$, такая что $u_t = F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с Q , удовлетворяющим условиям теоремы 2, тоже локально представима в виде (9), где n заменено на \tilde{n} , а $K_{\alpha, m}$ и ζ_i удовлетворяют дополнительным условиям $\partial F/\partial u_j = 0$ для $j > n$.

Заметим, что для $Q = u_k - g(x, t, u, \dots, u_{k-1})$ имеем $N = s \cdot k$, и формула (9) сводится к

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \mathbf{R} + \sum_{i=1}^N \zeta_i(t, h_1, \dots, h_N) \mathbf{B}_i + \\ & + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{m=0}^{n-k} D^m(Q^\alpha) \mathbf{K}_{\alpha,m}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{Q}, D(\mathbf{Q}), \dots, D^{n-k}(\mathbf{Q})). \end{aligned} \quad (10)$$

4. Примеры

Пример 1. Пусть

$$Q^\alpha = u_{n_\alpha}^\alpha - \sum_{\beta=1}^s \sum_{j=0}^{n_\beta-1} g_{\beta,j}^\alpha(x, t) u_j^\beta, \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (11)$$

Тогда $N = \sum_{\alpha=1}^s n_\alpha$ и общее решение системы $\mathbf{Q} = 0$ имеет вид $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N c_i(t) \mathbf{f}_i(x, t)$, где $c_i(t)$ — произвольные функции t и $\mathbf{f}_i \equiv (f_i^1, \dots, f_i^s)^\top$ — линейно независимые решения системы $\mathbf{Q} = 0$.

Имеем [11, 12] $h_i = Z_i/Z$, где

$$Z = \begin{vmatrix} f_1^1 & \dots & f_i^1 & \dots & f_N^1 \\ \partial f_1^1 / \partial x & \dots & \partial f_i^1 / \partial x & \dots & \partial f_N^1 / \partial x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^{n_1-1} f_1^1 / \partial x^{n_1-1} & \dots & \partial^{n_1-1} f_i^1 / \partial x^{n_1-1} & \dots & \partial^{n_1-1} f_N^1 / \partial x^{n_1-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^s & \dots & f_i^s & \dots & f_N^s \\ \partial f_1^s / \partial x & \dots & \partial f_i^s / \partial x & \dots & \partial f_N^s / \partial x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^{n_s-1} f_1^s / \partial x^{n_s-1} & \dots & \partial^{n_s-1} f_i^s / \partial x^{n_s-1} & \dots & \partial^{n_s-1} f_N^s / \partial x^{n_s-1} \end{vmatrix},$$

а Z_i получаются из Z заменой $\partial^j f_i^\alpha / \partial x^j$ на u_j^α . Легко видеть, что $\mathbf{B}_i = \mathbf{f}_i(x, t)$

и $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N (Z_i/Z) \partial \mathbf{f}_i(x, t) / \partial t$.

Если функции $g_{\beta,j}^\alpha$ аналитичны по x и t , то по теореме 2 наиболее общая локально аналитическая функция \mathbf{F} порядка $n \geq \max_i \text{ord } Z_i/Z$, допускающая ОУС $\mathbf{Q} \partial / \partial \mathbf{u}$ с \mathbf{Q} (11), локально может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{Z} \frac{\partial \mathbf{f}_i(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \zeta_i(t, Z_1/Z, \dots, Z_N/Z) \mathbf{f}_i(x, t) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{m=0}^{n-n_\alpha} D^m(Q^\alpha) \mathbf{K}_{\alpha,m}(x, t, \tilde{\mathbf{u}}, Q^1, D(Q^1), \dots, D^{n-n_1}(Q^1), \dots, \\ & Q^s, D(Q^s), \dots, D^{n-n_s}(Q^s)), \end{aligned} \quad (12)$$

где ζ_i и $\mathbf{K}_{\alpha,m}$ — произвольные локально аналитические функции своих аргументов, $\tilde{u} = (u^1, \dots, u_{n_1-1}^1, \dots, u^s, \dots, u_{n_s-1}^s)$ и для $n < n_\alpha$ $\mathbf{K}_{\alpha,m} \equiv 0$.

С этого момента и до конца раздела мы будем предполагать, что $s = 1$, и для простоты будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{u} \equiv u$, $\mathbf{Q} \equiv Q$, $\mathbf{F} \equiv F$.

Пример 2. Пусть $Q = L(u)$, где $L = \prod_{j=1}^N (D - k_j)$, и k_i , $i = 1, \dots, N$, — попарно различные ($k_i \neq k_j$, если $i \neq j$) постоянные, отличные от нуля. Тогда общее решение уравнения $Q = 0$ имеет вид $\sum_{i=1}^N c_i(t) \exp(k_i x)$, и мы получаем

$$h_i = \frac{\exp(-k_i x)}{\prod_{j=1, j \neq i}^N (k_i - k_j)} L_i(u),$$

где $L_i = \prod_{j=1, j \neq i}^N (D - k_j)$. Таким образом, наиболее общая локально аналитическая F порядка $n \geq N - 1$, такая что $u_t = F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с $Q = L(u)$, локально представима в виде

$$F = \sum_{i=1}^N \zeta_i(t, h_1, \dots, h_N) \exp(k_i x) + \sum_{m=0}^{n-N} D^m(Q) K_m(x, t, u, u_1, \dots, u_{N-1}, Q, D(Q), \dots, D^{n-N}(Q)), \quad (13)$$

где ζ_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов и при $n < N$ имеем $K_m \equiv 0$ для всех m .

Пример 3. Пусть $Q = u_2 - f(u, t)$, где f — произвольная аналитическая функция u и t . Положим $a(z, t) = \int f(z, t) dz$ и $\psi(y, z, t) = \int (2a(y, t) + z)^{-1/2} dy$. Тогда общее решение уравнения $Q = 0$ в неявном виде выглядит так: $\psi(u, c_1(t), t) = x + c_2(t)$, где $c_i(t)$ — произвольные функции t , и мы имеем $h_1 = u_1^2 - 2a(u, t)$, $h_2 = \psi(u, z, t)|_{z=h_1} - x$.

Следовательно, по теореме 2 наиболее общая локально аналитическая функция F порядка $n \geq 1$, такая что уравнение $u_t = F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с $Q = u_2 - f(u, t)$, локально имеет вид

$$F = -(2a(u, t) + h_1)^{1/2} \left(\left(\frac{\partial \psi(u, z, t)}{\partial t} \right) \Big|_{z=h_1} - \zeta_1(t, h_1, h_2) \int \frac{dy}{2(2a(y, t) + h_1)^{3/2}} - \zeta_2(t, h_1, h_2) \right) + \sum_{m=0}^{n-2} D^m(Q) K_m(x, t, u, u_1, Q, D(Q), \dots, D^{n-2}(Q)),$$

где ζ_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов; если $n < 2$, то $K_m \equiv 0$ для всех m .

Пример 4. Рассмотрим теперь несколько более сложный пример: $Q = u_2 - \varphi(x, t)f(u_1, t)$, где φ и f — произвольные аналитические функции своих аргументов и $f \neq 0$. Пусть $a(z, t) = \int dz/f(z, t)$, $\tilde{\varphi}(x, t) = \int \varphi(x, t) dx$, а $b(y, t)$ обозначает решение уравнения $a(z, t) = y$ по отношению к z , так что $a(b(z, t), t) \equiv z$. Тогда общее решение уравнения $Q = 0$ имеет вид $u = c_1(t) + \chi(x, c_2(t), t)$, где $\chi(x, z, t) = \int b(\tilde{\varphi}(x, t) + z, t) dx$, $c_i(t)$ — произвольные функции времени t , и мы имеем $h_1 = u - \chi(x, z, t)|_{z=h_2}$, $h_2 = a(u_1, t) - \tilde{\varphi}(x, t)$.

Следовательно, наиболее общая локально аналитическая функция F порядка $n \geq 1$, такая что уравнение $u_t = F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с $Q = u_2 - \varphi(x, t)f(u_1, t)$, локально имеет вид

$$F = \left(\frac{\partial \chi(x, z, t)}{\partial t} \right) \Big|_{z=h_2} + \zeta_1(t, h_1, h_2) + \zeta_2(t, h_1, h_2) \left(\frac{\partial \chi(x, z, t)}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_2} + \sum_{m=0}^{n-2} D^m(Q) K_m(x, t, u, u_1, Q, D(Q), \dots, D^{n-2}(Q)),$$

где ζ_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов и если $n < 2$, то $K_m \equiv 0$ для всех m .

Пример 5. Пусть теперь $Q = M(1)$, где $M = \prod_{j=1}^{N+1} (D - k_j - u)$. Общее решение уравнения $Q = 0$ имеет вид $-v_x/v$, где $v \equiv \sum_{i=1}^{N+1} b_i(t) \exp(k_i x)$. Заметим, что $-v_x/v$ на самом деле содержит только N независимых произвольных функций t . В самом деле, перенумеровав при необходимости b_i , можно без потери общности предположить, что $b_{N+1}(t) \neq 0$. Тогда мы можем записать $u = -v_x/v$ в виде

$$u = -D \left(\ln \left(\exp(k_{N+1} x) + \sum_{i=1}^N c_i(t) \exp(k_i x) \right) \right), \quad (14)$$

где $c_i(t) = b_i(t)/b_{N+1}(t)$, откуда получаем

$$h_i = \frac{\exp((k_{N+1} - k_i)x) M_i(1) \prod_{j=1}^{N+1} (k_{N+1} - k_j)}{M_{N+1}(1) \prod_{j=1, j \neq i}^{N+1} (k_i - k_j)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (15)$$

где $M_i = \prod_{j=1, j \neq i}^{N+1} (D - k_j - u)$.

Наиболее общая локально аналитическая функция F порядка $n \geq N - 1$, такая что уравнение $u_t = F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с $Q = M(1)$ (и, следовательно, решение (14) типа суперпозиции N ударных волн), локально представима в виде

$$F = - \sum_{i=1}^N \zeta_i(t, h_1, \dots, h_N) \exp(k_i x) \frac{\left(\sum_{j=1}^{N+1} (k_i - k_j) h_j \exp(k_j x) \right)}{\left(\sum_{q=1}^{N+1} h_q \exp(k_q x) \right)^2} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-N} D^m(Q) K_m(x, t, u, u_1, \dots, u_{N-1}, Q, D(Q), \dots, D^{n-N}(Q)), \quad (16)$$

где ζ_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов и если $n < N$, то $K_m \equiv 0$ для всех m . На этот раз h_i имеют вид (15), и для удобства мы положили $h_{N+1} = 1$. Соответствующее решение уравнения $u_t = F$ типа суперпозиции N ударных волн имеет вид (14), где $c_i(t)$ удовлетворяют (7).

Заметим, что среди функций F (16) легко указать те, которые не зависят явно от x и t . Они имеют вид

$$F = - \sum_{i=1}^N \eta_i \left(\frac{\tilde{h}_1^{k_{N+1}-k_N}}{\tilde{h}_N^{k_{N+1}-k_1}}, \dots, \frac{\tilde{h}_{N-1}^{k_{N+1}-k_N}}{\tilde{h}_N^{k_{N+1}-k_{N-1}}} \right) \frac{\tilde{h}_i \sum_{j=1}^{N+1} (k_i - k_j) \tilde{h}_j}{\left(\sum_{q=1}^{N+1} \tilde{h}_q \right)^2} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-N} D^m(Q) K_m(u, u_1, \dots, u_{N-1}, Q, D(Q), \dots, D^{n-N}(Q)), \quad (17)$$

где $\tilde{h}_i = h_i \exp((k_i - k_{N+1})x)$, и η_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов.

Подстановка решения (14) в уравнение $u_t = F$ с F вида (17) сводит это уравнение к следующей системе ОДУ:

$$\frac{dc_i}{dt} = c_i \eta_i \left(\frac{c_1^{k_{N+1}-k_N}}{c_N^{k_{N+1}-k_1}}, \dots, \frac{c_{N-1}^{k_{N+1}-k_N}}{c_N^{k_{N+1}-k_{N-1}}} \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Если $\zeta_i = -h_i \sum_{j=0}^m \alpha_j (k_i^j - k_{N+1}^j)$, где α_j — произвольные постоянные, то (16) задаёт наиболее общую F порядка $n \geq N - 1$, такую что уравнение $u_t = F$ допускает суперпозицию N ударных волн вида [7]

$$u = -D \left(\ln \left(\sum_{i=1}^{N+1} A_i \exp \left(k_i x - t \sum_{j=0}^m \alpha_j k_i^j \right) \right) \right), \quad (18)$$

где A_i — произвольные постоянные.

Таким образом, класс эволюционных уравнений, допускающих решения (18), содержит не только уравнение

$$u_t = \sum_{j=0}^m \alpha_j D(D - u)^j(u),$$

но и бесконечное множество других уравнений [7]. В частности, если порядок n функции F больше $N - 2$, из теоремы 2 следует, что соответствующие функции F имеют вид

$$F = \sum_{i=1}^N \sum_{r=0}^m \alpha_r (k_i^r - k_{N+1}^r) \frac{\tilde{h}_i \sum_{j=1}^{N+1} (k_i - k_j) \tilde{h}_j}{\left(\sum_{q=1}^{N+1} \tilde{h}_q \right)^2} + \sum_{m=0}^{n-N} D^m(Q) K_m(x, t, u, u_1, \dots, u_{N-1}, Q, D(Q), \dots, D^{n-N}(Q)).$$

5. Заключение

В теореме 2 настоящей статьи мы полностью описали локально аналитические эволюционные системы (1) заданного порядка $n \geq k - 1$, допускающие обобщённую условную симметрию $Q(x, t, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}_k) \partial / \partial \mathbf{u}$ с заданной аналитической вектор-функцией Q вида (8). В частности, для случая линейных ОУС, т. е. когда Q линейно по \mathbf{u}_j для всех j , правые стороны F таких систем (1) задаются формулой (12).

Результаты настоящей статьи несколько удобнее для применения на практике, чем формулы, полученные нами ранее в [13]. Например, использование теоремы 2 позволило нам найти явный вид *всех* $(1+1)$ -мерных локально аналитических эволюционных уравнений порядка $n \geq N - 1$, допускающих решения в виде суперпозиции N ударных волн (и, более общо, решения вида (14)), и обобщить соответствующие результаты Фокаса и Лью [7].

Более того, теорему 2 можно использовать для классификации точно решаемых задач типа Коши в духе [6, 17] и нахождения эволюционных уравнений, симметрии которых совместны с граничными условиями заданного вида, и следовательно, можно найти точные решения соответствующих краевых задач, ср. [4] и обсуждение в [13]. Мы планируем рассмотреть эти вопросы в другой работе.

Литература

- [1] Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов и И. С. Красильщик. — М.: Факториал, 1997.
- [2] Михайлов А. В., Шабат А. Б., Соколов В. В. Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. — Киев: Наукова думка, 1990. — С. 213—279.
- [3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.

- [4] Adler V. E., Gürel B., Gürses M., Habibullin I. Boundary conditions for integrable equations // *J. Phys. A.* — 1997. — Vol. 30, no. 10. — P. 3505–3513.
- [5] Andreytsev A. Classification of systems of nonlinear evolution equations admitting higher-order conditional symmetries // *Proc. 4th Int. Conf. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, 2001). Part 1.* — Kyiv: Institute of Mathematics, 2002. — P. 72–79.
- [6] Basarab-Horwath P., Zhdanov R. Z. Initial-value problems for evolutionary partial differential equations and higher-order conditional symmetries // *J. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 42, no. 1. — P. 376–389.
- [7] Fokas A. S., Liu Q. M. Generalized conditional symmetries and exact solutions of non-integrable equations // *Theoret. and Math. Phys.* — 1994. — Vol. 99. — P. 571–582.
- [8] Fokas A. S., Liu Q. M. Nonlinear interaction of traveling waves of nonintegrable equations // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 72. — P. 3293–3296.
- [9] Kamran N., Milson N., Olver P. Invariant modules and the reduction of nonlinear partial differential equations to dynamical systems // *Adv. Math.* — 2000. — Vol. 156, no. 2. — P. 286–319.
- [10] Rubin J., Winternitz P. Point symmetries of conditionally integrable nonlinear evolution equations // *J. Math. Phys.* — 1990. — Vol. 31. — P. 2085–2090.
- [11] Samokhin A. V. Symmetries of linear and linearizable systems of differential equations // *Acta Appl. Math.* — 1999. — Vol. 56. — P. 253–300.
- [12] Samokhin A. V. Full symmetry algebra for ODEs and control systems // *Acta Appl. Math.* — 2002. — Vol. 72, no. 1–2. — P. 87–99.
- [13] Sergyeyev A. Constructing conditionally integrable evolution systems in $(1 + 1)$ dimensions: a generalization of invariant modules approach // *J. Phys. A.* — 2002. — Vol. 35, no. 35. — P. 7653–7660.
- [14] Svirshchevskii S. R. Lie–Bäcklund symmetries of linear ODEs and invariant linear spaces // *Modern Group Analysis — Moscow: MFTI, 1993.* — P.75–83.
- [15] Zhdanov R. Z. Conditional Lie–Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations // *J. Phys. A.* — 1995. — Vol. 28. — P. 3841–3850.
- [16] Zhdanov R. Z. Higher conditional symmetries and reduction of initial value problems for nonlinear evolution equations // *Proc. Int. Conf. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, 1999). Part 1.* — Kyiv: Institute of Mathematics, 2000. — P. 255–263.
- [17] Zhdanov R. Z. Higher conditional symmetry and reduction of initial value problems // *Nonlinear Dynam.* — 2002. — Vol. 28. — P. 17–27.

