Divulgaciones Matem'aticas v. 4, No. 1/2 (1996), 99–100

Problemas y Soluciones

Problems and solutions

Editor: Jos'e Heber Nieto
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia
Apartado Postal 526. Maracaibo 4001. Venezuela.
(E-mail: jhnieto@@luz.ve)

Las soluciones y problemas propuestos (incluyendo sus soluciones, si se conocen) deben dirigirse al editor, por correo electr'onico o bien mecanografiadas y por duplicado, a la direcci'on dada m'as arriba.

Solutions and proposed problems (including their solutions, if known) should be sent to the editor by e-mail or typewritten, by duplicate, to the address given above.

1 Problemas propuestos

7. *Propuesto por Dar'io Dur'an (dduran@@luz.ve)*

   Sea ABC un tri'angulo con $AB = AC$ y sean M el punto medio de BC, P el pie de la perpendicular desde M hasta AC y N el punto medio de MP. Pruebe que $BP \perp AN$.

8. *Propuesto por el editor.*

   Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funci'on continua y $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto con complemento numerable. Pruebe que si la restricci'on de f a X es inyectiva entonces f es inyectiva.

9. *Propuesto por V'ictor Ram'irez (vramirez@@hydra.ciens.luz.ve)*

   Sea R un anillo cualquiera, I el conjunto de los $x \in R$ para los cuales existe alg'un $y \neq 0$ tal que $xy = 0$, y D el conjunto de los $y \in R$ para los cuales existe alg'un $x \neq 0$ tal que $xy = 0$. Pruebe que si R es infinito entonces o bien $I = D = (0)$ o bien $card(I) = card(D) = card(R)$.

10. *Propuesto por Ángel Oneto (aoneto@@luz.ve)*

    Sea A un dominio de integridad. Si A no es un cuerpo entonces existe un A-m'odulo M con subm'odulos M_1 y M_2 tales que ambos son libres de torsi'on pero M no lo es, y $M = M_1 + M_2$.

2 Soluciones

2. *Propuesto en el v. 1, No. 1 (1993), p. 106.*

   Sea $a > 2$ un n'umero real y definamos una sucesi'on as'i: $x_0 = a$, $x_n = x_{n-1}^2 - 2$ para $n > 0$. Calcule $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x_n}$.

Soluci'on por Oswaldo Larreal (olarreal@@hydra.ciens.luz.ve):

Pongamos $x_0 = z + z^{-1}$, siendo $z = (a + \sqrt{a^2 - 4})/2$. Entonces,

$$x_1 = (z + z^{-1})^2 - 2 = z^2 + z^{-2} \quad , \quad x_2 = (z^2 + z^{-2})^2 - 2 = z^4 + z^{-4}$$

y por inducci'on se prueba en general que

$$x_n = z^{2^n} + z^{-2^n}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x_n} = z \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{1 + z^{-4^n}} = z = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \quad .$$