

Root system of  $\mathfrak{sp}_6(\mathbb{C})$

(Ver *Graphical introduction to classical Lie algebras*, p. 185)

# Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XII, Número 2, Año 2005

I.S.S.N. 1315–4125

Editor

Argimiro Arratia

Comité Editorial

Oswaldo Araujo Eduardo Lima de Sá

Alejandra Cabaña Gerardo Mendoza Joaquín Ortega

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

## Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Carlos A. Di Prisco

Capítulos Regionales

**CAPITAL**

*Carlos A. Di Prisco*, Matemáticas, IVIC  
cdiprisc@ivic.ve

**LOS ANDES**

*Oswaldo Araujo*, Matemáticas, ULA  
araujo@ciens.ula.ve

**ZULIA–FALCON**

*Fernando Sánchez*, Matemáticas, LUZ  
fsanchez@luz.ve

**CENTRO–OCCIDENTAL**

*Neptalí Romero*  
nromero@uicm.ucla.edu.ve

Matemáticas, UCLA

**ORIENTE**

*Jacques Laforgue*  
laforgue@sucre.udo.edu.ve  
Matemáticas, UDO

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet o escribir a su dirección postal.

**Asociación Matemática Venezolana**

Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela

amv@usb.ve <http://amv.ivic.ve/>

**Asociación Matemática Venezolana**  
Apartado 47.898, Caracas 1041 – A, Venezuela

**Boletín  
de la  
Asociación  
Matemática  
Venezolana**

**Vol. XII • No. 2 • Año 2005**

**Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**  
**Volumen XII, Número 2, Año 2005**

**ARTÍCULOS**

<b>Polinomios positivos y desigualdades polinomiales</b> Carlos Andradás	<b>123</b>
<b>Un teorema de De Rham en el contexto de la Geometría no Conmutativa</b> Fernando Mejías	<b>135</b>
<b>Completeness conditions in certain Weyl complexes, combinatorics and parsimony</b> Mari Sano	<b>159</b>
<b>Graphical introduction to classical Lie algebras</b> Rafael Díaz & Eddy Pariguan	<b>185</b>
<b>Boundary value problems in complex analysis II</b> Heinrich Begehr	<b>217</b>

**EDUCACIÓN**

<b>The catenary (almost) everywhere</b> Juan B. Gil	<b>251</b>
--	------------

**DIVULGACIÓN MATEMÁTICA**

<b>Permutaciones y el Juego del 15</b> José Heber Nieto	<b>259</b>
--	------------

**INFORMACIÓN NACIONAL**

<b>El trabajo matemático de Pedro Berrizbeitia</b> T. G. Berry	<b>265</b>
<b>XIX Jornadas de Matemáticas</b>	<b>275</b>

**INFORMACIÓN INTERNACIONAL**

<b>La Esquina Olímpica</b> Rafael Sánchez Lamonedá	<b>277</b>
---	------------

<b>AGRADECIMIENTO</b>	<b>281</b>
-----------------------	------------

# Polinomios positivos y desigualdades polinomiales\*

Carlos Andradas

## 1. Introducción

Consideremos un polinomio en una variable  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ . Todos explicamos en nuestras clases que  $f(x)$  factoriza de la forma

$$f(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r} ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{\ell_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{\ell_s}$$

donde  $a_1, \dots, a_r$  son las raíces reales de  $f$  y los factores cuadráticos corresponden a los pares de raíces complejas conjugadas  $\alpha_k \pm i\beta_k$ .

Supongamos ahora que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces todos los exponentes  $m_j$  tienen que ser pares pues si no  $f(x)$  cambiaría signo en  $a_j$  y por consiguiente  $f(x)$  es una suma de cuadrados de polinomios. Además, gracias a la bien conocida identidad

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

resulta que los productos de sumas de dos cuadrados es, a su vez, una suma de dos cuadrados por lo que obtenemos que  $f(x)$  es suma de dos cuadrados de polinomios. En particular, concluimos que toda suma de cuadrados de polinomios en una variable puede escribirse como suma de (a lo más) DOS cuadrados. Denotaremos esto diciendo que el número de Pitágoras de  $\mathbb{R}[x]$  es  $\leq 2$ . Por otra parte,  $1 + x^2$  es un ejemplo de una suma de dos cuadrados que no es un cuadrado, con lo que la cota anterior es inmejorable.

Pasemos al caso de dos variables. Hilbert ya observó (por razonamientos teóricos y geométricos, utilizando propiedades clásicas de las cúbicas, pero sin exhibir ningún ejemplo concreto) que hay polinomios no negativos sobre todo el plano afín  $\mathbb{R}^2$  que no son sumas de cuadrados.

Robinson puso ecuaciones al razonamiento de Hilbert produciendo el primer ejemplo concreto de un polinomio en dos variables, no negativo sobre todo el plano afín, pero que no es suma de cuadrados de polinomios. Unos años más tarde Motzkin (1967) dió el siguiente sencillo (y simétrico) ejemplo:

$$M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

---

\*Charla inaugural de la XIX Escuela Venezolana de Matemáticas.

¿Por qué es  $M(x, y) \geq 0$ ? En este caso hay un fácil truco para observarlo: la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética aplicada a la terna  $1, x^2y^4, x^4y^2$  nos proporciona

$$\frac{x^2y^4 + x^4y^2 + 1}{3} \geq ((x^2y^4)(x^4y^2))^{1/3} = x^2y^2$$

¿Por qué  $M(x, y)$  no es suma de cuadrados? Aquí no hay más remedio que hacer algunas cuentas: pongamos

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 = g_1(x, y)^2 + \cdots + g_t(x, y)^2 \quad (1)$$

En primer lugar los  $g_i$  deben tener grado  $\leq 3$ . Haciendo  $x = 0$  resulta

$$1 = g_1(0, y)^2 + \cdots + g_t(0, y)^2$$

de donde resulta que los  $g_i(0, y)$  son constantes, esto es,

$$g_i(x, y) = xh_i(x, y) + c_i$$

con

$$c_1^2 + \cdots + c_t^2 = 1$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y haciendo  $y = 0$  obtenemos

$$1 = (xh_1(x, 0) + c_1)^2 + \cdots + (xh_t(x, 0) + c_t)^2$$

con lo que  $h_i(x, 0) = 0$ , es decir,

$$h_i(x, y) = yb_i(x, y).$$

En definitiva,

$$g_i(x, y) = xyb_i(x, y) + c_i$$

(como era esperable por razones de simetría), y además, por razones de grado,  $b_i(x, y)$  es de grado 1. Sustituyendo de nuevo en la ecuación (1) tenemos:

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 = x^2y^2 \sum_i b_i^2 + 2xy \sum_i b_i c_i + \sum_i c_i^2$$

Simplificando  $1 = \sum_i c_i^2$  resulta que  $x^2y^2$  divide a la expresión de la izquierda y el primer sumando de la derecha, luego  $xy$  debe dividir a  $\sum_i b_i(x, y) c_i$  que, como hemos señalado, es un polinomio de grado 1, por lo que  $\sum_i b_i(x, y) c_i = 0$ . Pero entonces, volviendo a la ecuación anterior y dividiendo por  $x^2y^2$  obtenemos que

$$x^2 + y^2 - 3 = \sum b_i(x, y)^2$$

lo que es claramente absurdo sin más que evaluar en 0.

Tras estas pequeñas cuentas puede ser el momento de señalar dos cuestiones. Denotemos por  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$  el conjunto de polinomios no negativos sobre  $\mathbb{R}^2$  y por  $\Sigma_{\mathbb{R}^2}$  el de sumas de cuadrados de polinomios en dos variables (omitiremos el subíndice cuando no haya duda de en qué espacio estamos trabajando).

**Problema 1.1.** *Decidir si un polinomio  $f(x, y)$  es no negativo sobre  $\mathbb{R}^2$  (es decir está en  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$ ).*

**Problema 1.2.** *Decidir si  $f(x, y)$  es una suma de cuadrados de polinomios (esto es,  $f$  está en  $\Sigma$ ).*

Aunque ambos problemas puedan parecer de dificultad similar, existen diferencias entre ellos: Dado un polinomio  $f(x, y)$  que sea suma de cuadrados, su grado debe ser par, digamos  $2d$ , por lo que el grado de los posibles sumandos es menor igual que  $d$  y el número de sumandos necesarios puede también acotarse en función de  $d$  (puede comprobarse que es menor o igual que  $\binom{d+2}{2}$ , esto es, la dimensión del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que  $d$ ). Por tanto el problema puede plantearse como la resolución sobre los números reales de un sistema (algebraico) de  $\binom{d+2}{2}$  ecuaciones (de grado  $\leq 2$ ) en  $\binom{d+2}{2}^2$  variables. La resolución de sistemas algebraicos ha experimentado grandes avances recientemente (gracias por ejemplo a algoritmos eficaces de cálculo de las bases de Gröbner).

El primer problema también es teóricamente decidible: se trata de decidir si el conjunto  $\{f(x) < 0\}$  es vacío. El método de eliminación de cuantificadores de Tarski nos dice que esto es posible, pero no existen por el momento métodos eficaces para ello.

¡Atención! Obsérvese que la cota  $\binom{d+2}{2}$  del número de cuadrados mencionada en el párrafo anterior, es para polinomios de grado fijo  $2d$  y no debe confundirse con el número de Pitágoras de  $\mathbb{R}[x, y]$ , esto es, con el número de cuadrados necesario para expresar cualquier polinomio que sea suma de cuadrados, independiente del grado. Podemos plantearnos un tercer problema, sobre el que volveremos más tarde:

**Problema 1.3.** *¿Es finito el número de Pitágoras de  $\mathbb{R}[x, y]$ ?*

En [7] se muestra que la colección de polinomios:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 1 \\ f_2(x, y) &= \Delta_1^2 f_1 + 1 = \Delta_1^2 + 1 \\ f_3(x, y) &= \Delta_2^2 f_2 + 1 = \Delta_2^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 1 \\ f_4(x, y) &= \Delta_4^2 f_3 + 1 = \Delta_4^2 \Delta_2^2 \Delta_1^2 + \Delta_4^2 \Delta_2^2 + \Delta_4^2 + 1 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta_1(x, y) &= y \\ \Delta_2(x, y) &= y(y - 2x) \\ \Delta_3(x, y) &= y(y - 2x)(y - 3x) \\ \Delta_4(x, y) &= y(y - 2x)(y - 3x)(y - 4x) \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

son todos sumas de cuadrados pero que el número de cuadrados necesarios para representar  $f_n$  es exactamente  $n$ , por lo que el número de Pitágoras del anillo  $\mathbb{R}[x, y]$  es infinito. Vemos pues que el cambio de situación al pasar de 1 a 2 variables ha sido drástico.

Volvamos a nuestros conjuntos  $\mathcal{P}$  y  $\Sigma$  de polinomios no negativos y sumas de cuadrados respectivamente. Ambos son conos convexos en el espacio vectorial  $\mathbb{R}[x, y]$  (quizás sería más correcto decir semi-conos ya que naturalmente sólo contienen a las semirrectas correspondientes al producto por escalares positivos) y, claramente,  $\Sigma$  está estrictamente contenido en  $\mathcal{P}$ , a la vista del ejemplo anterior ( $M(x, y)$  está en  $\mathcal{P}$  pero no en  $\Sigma$ ). Surge así otro interesante:

**Problema 1.4.** *¿Cómo es de grande la diferencia entre  $\mathcal{P}$  y  $\Sigma$ ?*

Para precisar un poco más esta cuestión denotemos por  $\mathcal{P}_d$  el conjunto de polinomios no negativos de grado menor o igual que  $2d$  y por  $\Sigma_d$  el conjunto de las sumas de cuadrados de polinomios de grado menor o igual que  $d$ . Ambos conjuntos son conos convexos en un espacio afín de dimensión finita: el de todos los monomios de grado menor o igual que  $2d$  en las variables. G. Blehkerman, [Bl], ha comparado los volúmenes de estos dos conos, demostrando el siguiente resultado que prueba que hay muchos más polinomios no negativos que sumas de cuadrados. En particular esta diferencia se va agrandando con el grado y el número de variables:

**Teorema 1.5.** *Existe una constante  $c(d)$  que depende sólo del grado  $d$  tal que*

$$\left(\frac{\text{Vol } \mathcal{P}_d}{\text{Vol } \Sigma_d}\right)^{\frac{1}{r}} \geq c(d)n^{(d-1)/2}$$

donde  $r$  es la dimensión de un determinado hiperplano de formas en el espacio de polinomios de grado  $2d$  en  $n$  variables.

## 2. El problema 17 de Hilbert

Volvamos a Hilbert. Ya hemos comentado que él probó que  $\mathcal{P}$  y  $\Sigma$  son, en general, distintos. En 1900 en su famosa lista de problemas en el ICM de París enunció su problema número 17:

**Problema 17 de Hilbert:** ¿Es todo polinomio no negativo sobre  $\mathbb{R}^n$  una suma de cuadrados de funciones racionales (i.e. fracciones de polinomios)? En otras palabras, si  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  es  $\geq 0$  sobre todo  $\mathbb{R}^n$ , ¿existen polinomios  $g_0, g_1, \dots, g_t$  tales que  $g_0^2 f = g_1^2 + \dots + g_t^2$ ?

La pregunta de Hilbert fue respondida por E. Artin en 1929 por medio de la teoría conocida hoy como de Artin-Schreier. Su idea esencial es el estudio y comprensión de las distintas formas de “ordenar” el anillo de los polinomios (o más exactamente su cuerpo de fracciones). Por una parte, las sumas de cuadrados son los elementos totalmente positivos, es decir, aquellos que son positivos en todos los órdenes posibles. Por otra parte, la posibilidad de definir un orden debe traducirse de alguna forma en términos geométricos.

Dar un orden en el anillo de polinomios (o cualquier otro anillo) consiste en fijar un criterio para comparar cuando un polinomio es mayor que otro, o equivalentemente, en definir cuando un polinomio es mayor que 0, esto es, cuando es positivo en ese orden. Por supuesto nos referimos siempre a órdenes compatibles con la estructura de cuerpo, es decir, que la suma y el producto de positivos debe ser positivo.

Intuitivamente hay un modo muy fácil de definir órdenes en los polinomios: basta fijar un punto y decir que un polinomio es positivo si es mayor que cero en una “región” determinada adyacente a dicho punto. (Siendo un poco más precisos: si es positivo en algún elemento de un filtro de conjuntos, de dimensión máxima, adherentes al punto. Para el caso de dimensión 1, para cada punto sólo existen dos tales filtros—y por consiguiente dos órdenes centrados en dicho punto—los intervalos  $(a - \varepsilon, a)$  y  $(a, a + \varepsilon)$ ).

La idea genial de Artin fue demostrar que a pesar de los muchos órdenes existentes en el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios, la información fundamental está contenida en el tipo de órdenes mencionado y que puede rescatarse por tanto mediante la evaluación en los puntos del espacio afín:

**Teorema 2.1** (Artin). *Existe un orden en  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$  en el que los polinomios  $f_1, \dots, f_r$  son simultáneamente positivos si y sólo si hay un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  en el que dichos polinomios son simultáneamente positivos, es decir, si y sólo si el conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\}$$

*es no vacío.*

Una vez conocida la respuesta afirmativa a la pregunta de Hilbert surge la pregunta cuantitativa acerca del número de cuadrados necesario. Recordemos que dado un cuerpo  $K$  llamamos número de Pitágoras de  $K$  al mínimo  $p$  tal que toda suma de cuadrados en  $K$  puede reducirse a una suma de  $\leq p$  cuadrados.

**Problema 17 cuantitativo (número de Pitágoras):** ¿Cuántos cuadrados son necesarios? En otras palabras, ¿cual es el número de Pitágoras del cuerpo de fracciones del anillo de polinomios en  $n$  indeterminadas?

El problema cuantitativo fue resuelto mucho más tarde por A. Pfister [10] por medio de la teoría de formas cuadráticas (y en particular de las formas que llevan su nombre). Demostró que, si representamos por  $p_n$  el número de Pitágoras del cuerpo de funciones racionales en  $n$  variables, entonces

$$n + 1 \leq p_n \leq 2^n.$$

Sin embargo, a día de hoy no se sabe si estas cotas son óptimas, por lo que terminamos esta sección con el siguiente problema abierto:

**Problema 2.2.** *Probar si las cotas anteriores de  $p_n$  son óptimas.*

### 3. Conjuntos semialgebraicos: una pequeña digresión

A partir del espectacular resultado de Artin, y más tarde del Teorema de Tarski sobre eliminación de cuantificadores para cuerpos real cerrados, el estudio de los subconjuntos del espacio afín  $\mathbb{R}^n$  definidos por desigualdades polinomiales experimentó un notable desarrollo. Estos conjuntos reciben el nombre de semialgebraicos. Más precisamente, un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es *semialgebraico* si es una combinación booleana de desigualdades polinomiales, es decir si puede describirse en la forma:

$$S = \bigcup_{i=1}^t \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, g_{i1} > 0, \dots, g_{is_i} > 0\}$$

con  $f_i, g_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ .

Los conjuntos semialgebraicos tienen buenas propiedades:

1. Son cerrados por combinaciones booleanas (uniones e intersecciones finitas y complementario).
2. Son cerrados por productos: Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$  son semialgebraicos entonces  $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$  es semialgebraico.
3. Son cerrados por proyecciones (Teorema de Tarski-Seidenberg).
4. Los semialgebraicos de la recta son las uniones finitas de intervalos.

Hay una muy abundante literatura sobre las propiedades topológicas de los conjuntos semialgebraicos, [3], [6]. Por ejemplo, los conjuntos semialgebraicos son triangulables, tienen una estructura local sencilla y un comportamiento esencialmente finito, es decir, fijado el grado de los polinomios que los describen pueden encontrarse cotas del número de tipos topológicos posibles, del número de componentes conexas que pueden tener, etc. De hecho, las 4 propiedades

definitorias señaladas antes se toman como definición de las llamadas estructuras **o-minimales**, cuyo ejemplo más sencillo son los conjuntos semialgebraicos, y que comparten un buen número de las propiedades de los mismos.

También tienen curiosas propiedades combinatorias, entre las que citaremos sólo una a título de ejemplo: cualquier intersección de desigualdades polinomiales estrictas en  $\mathbb{R}^n$  es equivalente a ... **¡una intersección con sólo  $n$  desigualdades!** Es decir, por muy grande que sea el número  $r$  tenemos que

$$\{g_1 > 0, \dots, g_r > 0\} = \{f_1 > 0, \dots, f_n > 0\}$$

para ciertos polinomios  $f_i$ . En concreto, en el plano  $\mathbb{R}^2$ , cualquier intersección arbitraria de desigualdades estrictas puede describirse mediante sólo dos desigualdades.

**Problema 3.1.** *Encontrar algoritmos para construir esta representación corta a partir de la dada.*

Del mismo modo, cualquier intersección de desigualdades polinomiales laxas en  $\mathbb{R}^n$  es equivalente a una intersección de un número de desigualdades que depende sólo de  $n$ , en este caso  $n(n+1)/2$ . Es decir, por muy grande que sea el número  $r$  tenemos que

$$\{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\} = \{f_1 \geq 0, \dots, f_n \geq 0\}$$

para ciertos polinomios  $f_i$ . Como en el caso de las desigualdades estrictas, esta cota es óptima. Sin embargo, es muy plausible que para determinadas clases “regulares” de semialgebraicos (los polihedros por ejemplo) la cota en el caso laxo coincida también con  $n$ , pero este problema está aun abierto.

#### 4. Positivstellensätze

En la Sección 2 tratamos los polinomios que son no negativos sobre todo el espacio afín  $\mathbb{R}^n$  y vimos que pueden ser escritos como suma de cuadrados de funciones racionales. ¿Qué podemos decir del “aspecto” de los polinomios  $f \in \mathbb{R}[x]$  que son positivos sobre un conjunto semialgebraico  $S = \{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\}$ ?

Comencemos analizando un sencillo ejemplo:

**Ejemplo:** Sea  $f(x)$  un polinomio en una variable y supongamos que es positivo en la semirrecta  $S = \{x \geq 0\}$ . Descomponemos  $f$  como al principio

$$f(x) = (x + a_1)^{m_1} \dots (x + a_k)^{m_k} \cdot (x - a_{k+1})^{m_{k+1}} \dots (x - a_r)^{m_r} \cdot ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{\ell_1} \dots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{\ell_s}$$

donde ahora  $a_1 > 0, \dots, a_r > 0$ , de modo que las  $k$  primeras raíces reales de  $f$  son negativas y las restantes positivas. Como  $f(x)$  es no negativo en todo

$\{x \geq 0\}$ , resulta que los exponentes  $m_{k+1}, \dots, m_r$  deben ser pares; además, para  $i \leq k$ , descomponiendo los  $m_i$  que sean impares como

$$(x + a_i)(x + a_i)^{2\nu_i} = x(x + a_i)^{2\nu_i} + a_i(x + a_i)^{2\nu_i}$$

resulta que

$$f = x \sum_j h_j^2 + \sum_k g_k^2$$

es decir se puede escribir como una combinación de los polinomios que describen  $S$  con coeficientes sumas de cuadrados. Con un razonamiento similar, pero un poco más de esfuerzo, puede comprobarse que si  $f$  es positivo en el intervalo  $\{x \geq 0, 1 - x \geq 0\}$  entonces puede escribirse de la forma

$$f = s_0 + xs_1 + (1 - x)s_2 + x(1 - x)s_3$$

donde los  $s_i$  son sumas de cuadrados de polinomios.

Volviendo al planteamiento general, consideremos el conjunto

$$\Sigma_S = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)} s_\varepsilon g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_r^{\varepsilon_r}$$

Observemos que todos sus elementos son polinomios no negativos sobre  $S$ . Este conjunto va a jugar el papel de “cono de sumas de cuadrados” sobre  $S$ .

Denotemos por  $\mathcal{P}_S$  el conjunto de polinomios no negativos sobre  $S$ .

Tomando  $S = \mathbb{R}^2 = \{1 \geq 0\}$  recuperamos  $\Sigma_S = \Sigma$  y  $\mathcal{P}_S = \mathcal{P}$  como en la Sección 1, y el ejemplo de Motzkin muestra que en general  $\mathcal{P}_S$  es estrictamente más grande que  $\Sigma_S$ . ¿Existe un análogo al problema 17 de Hilbert?

**Teorema 4.1.** (*PositiveStellensatz*, [13]) *a)  $f$  es no negativo ( $f \geq 0$ ) sobre  $S$  si y sólo si existen  $t_1, t_2 \in \Sigma_S$ ,  $N \in \mathbb{N}$  tales que*

$$ft_1 = f^{2N} + t_2$$

*b)  $f$  es positivo ( $f > 0$ ) sobre  $S$  si y sólo si existen  $t_1, t_2 \in \Sigma_S$  tales que*

$$f(1 + t_1) = 1 + t_2$$

Es decir,  $f$  es de nuevo suma de cuadrados sobre  $S$ , si admitimos denominadores.

**Problema 4.2.** *Decidir si un polinomio  $f(x, y)$  es no negativo sobre  $S$  (es decir si está en  $\mathcal{P}_S$ ).*

**Problema 4.3.** *Decidir si  $f(x, y)$  está en  $\Sigma_S$ .*

Estos problemas son más difíciles que en el caso del espacio afín, ya que la introducción de los polinomios  $g_j$  que definen  $S$  en la ecuación impide, por ejemplo, cualquier consideración sobre grados.

## 5. Teorema de Schmüdgen

En 1991, K. Schmüdgen en su estudio del problema de los momentos (i.e. cuando un funcional lineal puede ser expresado como una integral para una cierta medida de Borel) sobre conjuntos semialgebraicos, demostró que si  $S = \{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\}$  es compacto y  $f > 0$  sobre  $S$  entonces lo es sobre  $\Sigma_S$ , es decir no necesita denominadores para ser expresado como suma de cuadrados sobre  $S$ , [12]. Por otra parte, la siguiente modificación del polinomio de Motzkin:  $M'(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + 1$  es estrictamente positivo sobre  $\mathbb{R}^2$  pero (de modo similar a lo hecho en la Sección 1) no es suma de cuadrados, por lo que sin la hipótesis de compacidad el resultado es, en general, falso. Ello ha despertado el interés sobre el siguiente:

**Problema 5.1.** *Caracterizar los conjuntos  $S$  que tienen la propiedad de Schmüdgen, es decir para los que  $\mathcal{P}_S^+ \subset \Sigma_S$ . donde  $\mathcal{P}_S^+$  representa los polinomios que son estrictamente positivos sobre  $S$ .*

Para  $S$  no compacto, la respuesta está lejos de conocerse, incluso para dimensión dos. Obsérvese que la solución depende, en general, de los descriptores  $g_1, \dots, g_r$  del conjunto  $S$ . Así, en el ejemplo expuesto en la sección anterior, el semieje  $S = \{x \geq 0\}$  puede también describirse como  $S = \{x^3 \geq 0\}$ . Sin embargo no es cierto que todo polinomio  $f(x) > 0$  sobre  $S$  se pueda expresar como una combinación de  $x^3$  con coeficientes sumas de cuadrados. Por ejemplo, el polinomio  $x$  no puede expresarse de esta forma. Esto lleva a introducir la noción de descriptor natural de un semialgebraico, en la que no entraremos. Simplemente nos basta con la idea de que  $x$  es un generador natural para el semieje positivo, mientras que  $x^3$  no. Sin entrar en precisiones, en el caso de que  $\dim S = 1$ , esto es  $S$  es un subconjunto semialgebraico de una curva algebraica, se sabe que  $S$  tiene la propiedad de Schmüdgen si los descriptores de  $S$  son “buenos”, [8].

Si  $\dim S = 2$  la situación es mucho más desconocida. Si  $S \subset \mathbb{R}^2$  y contiene un cono (esto es, la región comprendida entre dos semirectas concurrentes en un punto)  $S$  no tiene la propiedad de Schmüdgen. De modo más preciso, si denotamos por  $\bar{S}$  la clausura de  $S$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  y  $\bar{S} \setminus S$  es denso en la recta del infinito, entonces  $\mathcal{P}_S^+ \not\subset \Sigma_S$ , [11]. Pero por ejemplo, la cuestión de decidir si la franja

$$S = [1, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 \geq 0, 1 - x \geq 0\}$$

tiene o no la propiedad de Schmüdgen está abierta. Finalmente en dimensiones superiores sólo conocemos que si  $S$  contiene un cono bidimensional entonces  $S$  no tiene la propiedad de Schmüdgen.

Si admitimos que  $f$  tenga ceros en  $S$ , entonces el resultado de Schmüdgen sabemos que no es cierto en general y tiene sentido plantearse el siguiente

**Problema 5.2.** *¿Hay alguna clase identificable de conjuntos  $S$  para los que  $\mathcal{P}_S = \Sigma_S$ ?*

En resultados recientes sobre este problema, C. Scheiderer, [11], ha probado que si  $\dim S \geq 3$  estos conos son distintos, independientemente de que  $S$  sea o no compacto y de los descriptores  $g_j$  de  $S$ . Como antes, en el caso de curvas (esto es  $\dim S = 1$ ) la situación es esencialmente conocida, y en dimensión dos se tienen resultados parciales. Si  $S$  es compacto y sus funciones descriptoras son no singulares y se cortan transversalmente dos a dos, entonces  $\mathcal{P}_S = \Sigma_S$ , [11]. También sabemos que esta igualdad es cierta en el caso de  $S$  tenga sólo un número finito de ceros en  $S$  y que en cada uno de ellos  $f$  pueda expresarse localmente (en el anillo de series en el punto) como suma de cuadrados sobre  $S$ . Y por supuesto los resultados negativos expuestos antes para el caso de  $f > 0$  también son válidos, con mayor motivo, aquí.

**Observación.** Hasta ahora hemos trabajado siempre sobre el afín  $\mathbb{R}^n$ , pero todos los problemas expuestos pueden plantearse, más generalmente, sobre una variedad algebraica irreducible  $V \subset \mathbb{R}^n$ , reemplazando el anillo  $\mathbb{R}[X]$  por el anillo de funciones polinomiales  $\mathbb{R}[X]/I$  donde  $I$  es el ideal de polinomios que se anulan sobre  $V$ . Todos los resultados comentados (solución al problema 17 de Hilbert, Positivstellensatz, etc.) son válidos en este contexto con los cambios obvios.

En la línea del último problema expuesto, podemos plantearnos entonces:

**Problema 5.3.** *Caracterizar las variedades algebraicas  $V$  para las que  $\mathcal{P} = \Sigma$ , esto es las funciones de  $\mathbb{R}[V]$  no negativas son sumas de cuadrados de elementos de  $\mathbb{R}[V]$  (también expresado en la literatura por el acrónimo  $psd = sos$  (positive semidefined = sums of squares)).*

El teorema de Schmüdgen afirma, en este caso, que si  $V$  es compacta toda función estrictamente positiva es *sos*. C. Scheiderer, en el trabajo ya mencionado, muestra que para curvas algebraicas puede darse una caracterización precisa de aquellas para las que  $psd = sos$  y que esta igualdad es falsa para todas las variedades con dimensión  $\geq 3$ . En el caso de superficies por el momento sólo se han obtenido resultados parciales estando el caso general abierto.

## 6. Otras Extensiones

Finalizamos comentando brevemente algunas extensiones de las cuestiones expuestas a otros contextos. En particular podemos sustituir el anillo de polinomios por otros anillos de funciones como las funciones analíticas, funciones  $C^\infty$ , de Nash, ..., los conjuntos semialgebraicos por la correspondiente clase de conjuntos (combinaciones booleanas de desigualdades de las funciones consideradas) y repetir las mismas preguntas mencionadas a lo largo del texto:

problema 17 de Hilbert, Positivstellensatz, números de pitágoras, etc. El caso de las funciones de Nash (funciones algebraicas sobre los polinomios) la situación es esencialmente idéntica a la del anillo de polinomios. En el caso de las funciones analíticas en el entorno de un punto (i.e. gérmenes de funciones analíticas) el comportamiento es también análogo al caso polinomial, [1]. La situación es radicalmente distinta para el caso de funciones analíticas globales. En este caso conocemos que el problema 17 de Hilbert es “cierto” para  $\mathbb{R}^2$ , es decir toda función analítica no negativa sobre  $\mathbb{R}^2$  es suma de cuadrados de funciones meromorfas [5], pero es un problema abierto para  $n \geq 3$ .

Recientemente ha habido también avances en la dirección de encontrar algoritmos eficientes para representar un polinomio no negativo como suma de cuadrados [9]. Estos resultados utilizan técnicas de programación semidefinida y deben seguir explorándose.

## Referencias

- [1] Andradas, C., Bröcker, L., Ruiz, J.M. Real Constructible Sets. *Erg. Math.* **33** Springer, Berlin (1996)
- [2] Blekherman, G. There Are Significantly More Nonnegative Polynomials than Sums of Squares. arXiv:math.AG/0309130v1 (2003)
- [3] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.F. Real Algebraic Geometry. *Erg. Math.* **36** Springer, Berlin (1998)
- [4] Bröcker, L. Minimale Erzeugung von Positivbereichen. *Geom. Dedicata* **16**, 335-350 (1984)
- [5] Castilla, A., Artin-Lang property for analytic manifolds of dimension two. *Math. Z.* **217**, 5-14 (1994)
- [6] Coste, M. An Introduction to Semialgebraic Geometry. *Dip. Mat. Univ. Pisa, Dottorato di Ricerca in Matematica, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa* (2000)
- [7] Delzell, C. Prestel, A. Positive Polynomials: From Hilbert’s 17th Problem to Real Algebraic Geometry. Springer Monographs in Mathematics, (2001).
- [8] Kuhlman, S., Marshall, M. Positivity, sums of squares end the multidimensional moment problem. *Trans. Am. Math. Soc.* **354** 4285-4301 (2002)

- [9] Parrilo, P., Sturmfels, B. Minimizing polynomial functions. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **60**: Algorithmic and Quantitative Real Algebraic Geometry. AMS, (2003)
- [10] Pfister, A. Quadratische Formen in beliebigen Körpern. *Invent. math.* **1**, 116-132 (1966)
- [11] Scheiderer, C. Positivity and sums of squares: a guide to some recent results.  
<http://www.uni-duisburg.de/FB11/FGS/F1/claus.html#preprints>
- [12] Schmüdgen, K. The K-moment problem for compact semialgebraic sets. *Math. Ann.* **289**, 203-206 (1991)
- [13] Stengle, G. *A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. Math. Ann.* **207**, 87-97 (1974)

CARLOS ANDRADAS,  
CATEDRÁTICO DE ALGEBRA,  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID.  
PRESIDENTE DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA.

# Un teorema de De Rham en el contexto de la Geometría no Conmutativa \*

Fernando Mejías

## Resumen

Presentamos una perspectiva histórica sobre como se usan las formas diferenciales no conmutativas (las cuales fueron primero introducidas por A. Connes) para construir una versión no conmutativa del complejo de Cenkly y Porter  $\Omega^{*,*}(X)$  para un conjunto simplicial de tipo finito  $X$ , donde  $\Omega^{*,*}(X)$  es un álgebra diferencial graduada con una filtración  $\Omega^{*,q}(X) \subset \Omega^{*,q+1}(X)$ , tal que  $\Omega^{*,q}(X)$  es un módulo sobre  $\mathbf{Q}_q$  (el menor subanillo de los racionales que contiene a  $1/p$  si  $p \leq q$ ). Seguidamente se usan versiones no conmutativas del Lema de Poincaré y del teorema de Stokes para demostrar el teorema no conmutativo moderado de De Rham: si  $X$  es un conjunto simplicial de tipo finito, entonces para cada  $q \geq 1$  y cualquier módulo  $M$  sobre  $\mathbf{Q}_q$ , la integración de formas induce un isomorfismo natural de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$   $I : H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \rightarrow H^i(X; M)$  para todo  $i \geq 0$ .

## Abstract

We present a historical view about how noncommutative differential forms (which were first introduced by A. Connes) can be used to construct a noncommutative version of the complex of Cenkly and Porter  $\Omega^{*,*}(X)$  for a simplicial set of finite type  $X$ , such that  $\Omega^{*,*}(X)$  is a differential graded algebra with a filtration  $\Omega^{*,q}(X) \subset \Omega^{*,q+1}(X)$ , and  $\Omega^{*,q}(X)$  is a module over  $\mathbf{Q}_q$  (the smallest subring of the rationals which contains  $1/p$  whenever  $p \leq q$ ). Next we use noncommutative versions of the Poincaré Lemma and Stokes' theorem to prove the noncommutative tame de Rham theorem: if  $X$  is a simplicial set of finite type, then for each  $q \geq 1$  and any  $\mathbf{Q}_q$ -module  $M$ , then integration of forms induces a natural isomorphism of  $\mathbf{Q}_q$ -modules  $I : H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \rightarrow H^i(X; M)$  for all  $i \geq 0$ .

**Palabras Clave/Keywords:** Complejo de Cenkly y Porter, formas diferenciales no conmutativas moderadas, conjuntos simpliciales, teorema de De Rham.

**2001 Mathematics Subject Classification. Primary 55N35.**

---

\*El contenido de este trabajo es una versión ampliada del material presentado por el autor en una conferencia durante las XVII Jornadas de Matemática de la Asociación Matemática Venezolana, realizada en el Núcleo Universitario "Rafael Rangel" de la Universidad de Los Andes en Trujillo en el año 2004.

## 1 Introducción

Los inicios de la topología diferencial se encuentran asociados a la exploración de triangulación de una variedad incentivados por los trabajos de Poincaré. En especial, E. Cartan usó la teoría global de formas diferenciales con relación a este problema. En particular, Cartan demostró que sobre  $\mathbf{R}^n$  cualquier  $p$ -forma es la diferencial de una  $(p-1)$ -forma; una generalización del caso clásico  $p=1$  que Cartan denominó el “recíproco del lema de Poincaré”. Cartan mismo hizo notar que dicho resultado no es cierto si en lugar del espacio  $\mathbf{R}^n$  se considera una variedad suave arbitraria  $X$ .

Para la exploración de este tema Cartan sugirió considerar la función bilineal

$$(c, \omega) \rightarrow \langle c, \omega \rangle = \int_c \omega,$$

donde  $c$  es un  $p$ -ciclo de una triangulación de  $X$  y  $\omega$  es una  $p$ -forma diferencial cerrada sobre  $X$  y planteó utilizar el teorema de Stokes para resolver los siguientes problemas:

- (I) Si  $\omega$  es una  $p$ -forma cerrada con  $\langle c, \omega \rangle = 0$  para todos los  $p$ -ciclos  $c$ , entonces  $\omega$  es exacta.
- (II) Si  $c$  es un  $p$ -ciclo cerrado con  $\langle c, \omega \rangle = 0$  para todas las  $p$ -formas cerradas  $\omega$ , entonces  $c$  es una frontera.

El problema de Cartan fue publicado en 1928. Por esos días De Rham consideró el problema de Cartan como parte de su trabajo de tesis. En dicho trabajo De Rham demostró que cualquier  $p$ -forma sobre  $X$  se puede escribir como  $\omega + d\zeta$ , donde  $\omega$  es una combinación lineal de  $p$ -formas elementales y  $\zeta$  es una  $(p-1)$ -forma y a partir de esta idea dedujo las proposiciones (I) y (II).

Con el desarrollo de la teoría de homología, más específicamente las técnicas de cohomología, resultó claro que el trabajo de De Rham podía ser expresado en términos del complejo  $(\Omega^*(X), d)$  de las formas diferenciales sobre  $X$  y del complejo de cocadenas singulares estándar  $(C^*(X), \delta)$  derivado de la triangulación de  $X$ , así, si  $H^i(\Omega^*(X), \mathbf{R})$  y  $H^i(C^*(X), \mathbf{R})$  representan los  $i$ -ésimos espacios vectoriales de cohomología de los respectivos complejos tenemos

**Teorema.** *Sea  $X$  una variedad suave de dimensión  $n$ . Entonces para cada  $i \geq 0$  existe un isomorfismo natural de espacios vectoriales sobre  $\mathbf{R}$*

$$H^i(X; \mathbf{R}) \xrightarrow{\cong} H^i(\Omega_{*,q}(X); \mathbf{R}).$$

En 1976, H. Cartan publicó en [5] otra versión del teorema de De Rham considerando una filtración  $A^{*,q}(X; \mathbf{Z}) \subset A^{*,q+1}(X)$  para el complejo de las

formas polinómicas  $A^*(X; \mathbf{Q})$  sobre un espacio simplicial  $X$ , obteniendo un isomorfismo

$$H^i(A^{*,q}(X; \mathbf{Z})) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \mathbf{Z}),$$

para  $i \leq q$ .

Aunque en este caso no se pudo construir un “modelo” para  $A^*$ , en el sentido de la estructura construida por Sullivan en [38] para estudiar el complejo  $\Omega^*(X; \mathbf{Q})$ . Esta situación fue parcialmente mejorada hacia 1983, cuando Cenkl y Porter [10,11] construyeron un “modelo” especial después de demostrar el teorema de De Rham para formas cúbicas. Cenkl y Porter construyeron un complejo de formas diferenciales polinómicas  $T^*(X, \mathbf{Z})$  con filtración  $T^{*,q}(X) \subset T^{*,q+1}(X)$  dependiendo del grado de los polinomios y las formas elementales, de tal manera que  $T^{*,q}(X)$  es un módulo sobre  $\mathbf{Q}_q$  (el menor subanillo de los racionales que contiene a  $1/p$  si  $p \leq q$ ). Así ellos demostraron que la integración de formas induce un isomorfismo de módulos  $I : H^i(T^{*,q}(X; \mathbf{Q}_q)) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \mathbf{Q}_q)$  para todo  $i$  y para todo  $q$ , siendo  $X$  un espacio simplicial de tipo finito.

Posteriormente Boullay, Kefer, Majewski, Stelzer, Scheerer, Unsöld y Vogt [4] extendieron la teoría de Cenkl y Porter a un conjunto simplicial general.

En 1987 Karoubi intentó obtener en [21] un “modelo” más general considerando el complejo de De Rham  $\Omega^*(X)$  de las formas diferenciales no conmutativas sobre un espacio simplicial  $X$  (las cuales fueron introducidas originalmente por Connes en [12]) y demostrando una versión del teorema de De Rham en este contexto. Trabajando con esta idea, por ejemplo, Battikh en [3] introdujo una generalización del *cup product*  $\cup$  en cohomología.

Una versión ligeramente más general del resultado de Karoubi fue demostrada en 1998 por Cenkl (ver [7]). Tanto Karoubi como Cenkl probaron los mencionados teoremas usando técnicas similares a las que usó Cartan en su *paper* de 1976. Sin embargo, en [20] que si el anillo  $\Lambda$  de coeficientes se supone ser un subanillo de los racionales, entonces una versión del teorema no conmutativo de De Rham podría ser demostrada al estilo del teorema clásico. El objetivo final del presente artículo es la presentación de una solución a dicho problema, para lo cual se considera una versión no conmutativa del complejo de formas diferenciales de Cenkl y Porter  $\Omega^{*,*}(X)$  para un espacio simplicial de tipo finito, obteniendo el siguiente *teorema no conmutativo moderado de De Rham*:

**Teorema.** *Sea  $X$  un espacio simplicial de tipo finito. Entonces para cada  $q \geq 1$  y cada módulo  $M$  sobre  $\mathbf{Q}_q$  existe un isomorfismo natural de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$  tal que*

$$H^i(\Omega^{*,q}(X); M) \xrightarrow{\cong} H^i(X; M)$$

para todo  $i \geq 0$ . El isomorfismo es inducido por integración.

## 2 Conjuntos simpliciales

En esta sección presentamos una breve introducción al concepto de objeto simplicial y estudiamos algunos ejemplos. Para más detalles ver [26], [27] y [29].

Un *conjunto simplicial*  $X$  es un conjunto graduado con índices enteros no negativos junto con los operadores  $d_i : X_k \rightarrow X_{k-1}$  y  $s_i : X_k \rightarrow X_{k+1}$ ,  $0 \leq i \leq k$ , los cuales satisfacen las siguientes identidades:

- (i)  $d_i d_{j+1} = d_j d_i$  si  $i \leq j$ ,
- (ii)  $s_i s_j = s_{j+1} s_i$  si  $i \leq j$ ,
- (iii)  $d_i s_j = s_{j-1} d_i$  si  $i < j$ ,
- (iv)  $d_j s_j = \text{identidad} = d_{j+1} s_j$ ,
- (v)  $d_i s_j = s_j d_{i-1}$  si  $i > j + 1$ .

Los elementos de  $X_k$  se denominan *simplices de dimensión  $k$*  o simplemente  *$k$ -simplices*.

Dados dos conjuntos simpliciales  $X$  e  $Y$ , y una función  $f : X \rightarrow Y$ , decimos que  $f$  es una *transformación simplicial (de grado cero)* si  $f$  conmuta con los operadores  $d_i$  y  $s_i$  para todo  $i$  y para todo  $k$ . El *producto cartesiano*  $X \times Y$  es el conjunto simplicial  $(X \times Y)_k = X_k \times Y_k$  con

$$d_i(x, y) = (d_i x, d_i y), \quad s_i(x, y) = (s_i x, s_i y), \quad \text{para todo } x \in X_k, y \in Y_k \text{ y } 0 \leq i \leq k.$$

**Ejemplo 2.1** Sea  $V$  un conjunto parcialmente ordenado. Sea  $X_k$  el conjunto de todas las sucesiones finitas  $(x_0, \dots, x_k)$ , con  $x_0 \leq \dots \leq x_k$ ,  $x_0, \dots, x_k \in V$ . Definamos  $d_i : X_k \rightarrow X_{k-1}$  y  $s_i : X_k \rightarrow X_{k+1}$ ,  $0 \leq i \leq k$  por

$$d_i(x_0, \dots, x_k) = (x_0, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_k) \quad (\text{omitir } x_i)$$

y

$$s_i(x_0, \dots, x_k) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) \quad (\text{repetir } x_i).$$

Entonces  $X = \{X_k\}$  es un conjunto simplicial.

**Ejemplo 2.2** Denotemos por  $\Delta$  la categoría cuyos objetos son todas las sucesiones finitas de enteros  $\Delta(n) = \{0, 1, \dots, n\}$  y los morfismos son todas las funciones crecientes  $f : \Delta(n) \rightarrow \Delta(m)$  (para todo  $0 \leq i \leq j \leq n$  tenemos  $f(i) \leq f(j)$ ).

Definimos los operadores  $\delta_i : \Delta(n-1) \rightarrow \Delta(n)$  y  $\sigma_i : \Delta(n+1) \rightarrow \Delta(n)$  para  $0 \leq i \leq n$  por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i, \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases} \quad \text{y} \quad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i, \\ j-1 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Entonces cada  $f \in \text{Hom}(\Delta(n), \Delta(m))$  puede ser escrita como un producto finito de algunas  $\delta$  y  $\sigma$ .

Un *objeto simplicial en una categoría  $\mathcal{C}$*  es un functor contravariante  $F : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ . Un conjunto simplicial  $X$  puede ser identificado con un objeto simplicial en la categoría de los conjuntos **Set**,  $F : \Delta \rightarrow \mathbf{Set}$ ,  $X = F(\Delta_n) = X$  (ver [26], p. 233 o [29], p. 4).

Si  $\Lambda$  es un anillo, un  $\Lambda$ -*módulo simplicial* es un objeto simplicial en la categoría **Mod** de los módulos sobre el anillo  $\Lambda$ . Si  $M$  y  $N$  son  $\Lambda$ -módulos simpliciales, entonces el producto tensorial  $M \otimes N$  es también un  $\Lambda$ -módulo simplicial con  $d_i$  y  $s_i$  sobre  $(M \otimes N)_k = M_k \otimes N_k$  definidos así:

$$d_i(x \otimes y) = d_i x \otimes d_i y, \quad s_i(x \otimes y) = s_i x \otimes s_i y, \quad \text{para todo } x \in X_k, y \in Y_k \text{ y } 0 \leq i \leq k.$$

Un *álgebra graduada simplicial*  $A^* = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$  es una familia de álgebras graduadas  $A_k^* = \bigoplus_{n \geq 0} A_k^n$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  sobre un anillo conmutativo  $\Lambda$  la cual es un conjunto simplicial y los operadores  $d_i$  y  $s_i$  son morfismos de álgebras graduadas.

**Ejemplo 2.3** Sea  $\Delta_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid 0 \leq a_i \leq 1, \sum a_i = 1\}$  el  $n$ -simplex estándar (Figure 1-1). Las funciones  $\delta_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$  y  $\sigma_i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$

$$\delta_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

y

$$\sigma_i(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}).$$

Sea  $P_n$  la colección de todos los polinomios  $f : \Delta_n \rightarrow \mathbf{R}$  con coeficientes en  $\mathbf{Z}$  y sea  $P = \{P_n\}_{n \geq 0}$ . Entonces  $P$  es un conjunto simplicial. En este caso tenemos  $\partial_i : P_n \rightarrow P_{n-1}$  y  $s_i : P_n \rightarrow P_{n+1}$  definidos para dada  $f \in P_n$  por

$$\partial_i(f) = f \circ \delta_i \quad \text{y} \quad s_i(f) = f \circ \sigma_i,$$

La multiplicación de polinomios induce una estructura de álgebra sobre  $P$ . Entonces  $P$  es un álgebra simplicial.

**Ejemplo 2.4** En lugar del simplex estándar  $\Delta_n$  (como en el Ejemplo 2.3) consideramos  $\Delta_n$  como el subconjunto de la frontera de  $I^{n+1}$  (el  $(n+1)$ -cubo en  $\mathbf{R}^{n+1}$ ) dado por

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ y } \prod_i x_i = 0\},$$

es decir,  $\Delta_n$  es identificado con las caras posteriores de  $I^{n+1}$  (Figure 1-2).

Definimos las funciones  $\delta_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$  y  $\sigma_i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$  por

$$\delta_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$$

y

$$\sigma_i(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i \cdot x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1})$$

(ver [10] y [9]).

Si  $T_n$  es la colección de los polinomios  $f : \Delta_n \rightarrow \mathbf{R}$  con coeficientes en  $\mathbf{Z}$  y si  $T = \{T_n\}_{n \geq 0}$ , entonces  $T$  es un álgebra simplicial. En este caso tenemos  $\partial_i : P_n \rightarrow P_{n-1}$  y  $s_i : P_n \rightarrow P_{n+1}$  están definidos para cada  $f \in P_n$  por

$$\partial_i(f) = f \circ \delta_i \quad \text{y} \quad s_i(f) = f \circ \sigma_i,$$

**Ejemplo 2.5** Sea  $\mathcal{I}_n$  el ideal generado por los polinomios  $\prod_{j=0}^n x_j$ . Entonces  $P_n$  se puede identificar con el cociente  $T_n = \mathbf{Z}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{I}_n$ . Si  $T = \{T_n\}_{n \geq 0}$ , entonces la multiplicación sobre  $\mathbf{Z}[x_0, \dots, x_n]$  induce una estructura de  $\mathbf{Z}$ -álgebra sobre  $T_n$ . Luego  $T$  es un álgebra simplicial.

Sean  $X$  un conjunto simplicial y  $C_n(X)$  el grupo libre sobre  $X_n$ . Denotemos por  $C_*(X)$  el complejo de cadenas  $(C_n(X), \partial)$  con el *operador frontera*  $\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ . Los elementos de  $C_n(X)$  son denominados *n-cadenas* en  $X$ . Si  $X$  es un conjunto simplicial y  $G$  es un grupo abeliano entonces la *homología de  $X$  con coeficientes en  $G$*  está definida por

$$H_*(X; G) = H(C_*(X) \otimes G).$$

Si  $C^*(X)$  denota el complejo  $(C^n(X), \delta)$  de *cocadenas en  $X$  con coeficientes en  $G$* , es decir  $C^n(X; G) = \text{Hom}(C_n(X), G)$  y el *operator cofrontera*  $\delta$  es el dual de  $\partial$ . La *cohomología de  $X$  con coeficientes en  $G$*  está definida por

$$H^*(X; G) = H(C^*(X), G).$$

### 3 El complejo de Cenkly y Porter

En esta sección introducimos el complejo de Cenkly y Porter, es decir el complejo de las formas diferenciales compatibles sobre las caras posteriores del cubo estándar. Cenkly y Porter primero demostraron el teorema de De Rham para el complejo de formas diferenciales cúbicas usando integración (ver [10]). Posteriormente, Boullay, Kefer, Majewski, Stelzer, Scheerer, Unsöld y Vogt [4] introdujeron *el complejo de Cenkly y Porter* o *el complejo de De Rham de formas diferenciales moderadas* y demostraron el teorema de De Rham para un conjunto simplicial siguiendo las ideas de Cartan.

Denotemos por  $\Delta_n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  el simplex convencional (Ejemplo 2.4). Una forma básica de peso  $q$  sobre  $\Delta_n$  en las coordenadas  $x_0, x_1, \dots, x_n$  es una forma diferencial de

$$x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_j}^{a_j} x_{k_1}^{b_1} dx_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_p}^{b_p} dx_{k_p}$$

donde  $\{i_1, \dots, i_j\}$  y  $\{k_1, \dots, k_p\}$  son subconjuntos disjuntos de  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,  $a_i$  y  $b_j$  son enteros no negativos y  $q = \max\{a_1, \dots, a_j, b_1 + 1, \dots, b_p + 1\}$ . Sea  $\mathbf{Q}_q = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{q}]$  el menor subanillo de los racionales tales que  $1/p$  si  $0 < p \leq q$  para  $q > 1$ , y  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Z}$ . Denotemos por  $T^{p,q}(\Delta_n)$  el módulo de las combinaciones lineales sobre de las  $p$ -formas básicas de peso  $\leq q$ . El producto exterior  $\wedge$  induce una función

$$\wedge : T_n^{p_1, q_1}(\mathbf{Z}) \otimes T_n^{p_2, q_2}(\mathbf{Z}) \rightarrow T_n^{p_1+p_2, q_1+q_2}(\mathbf{Z})$$

y la diferencial usual  $d$  se extiende a un morfismo de  $\mathbf{Z}$ -módulos  $d : T_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \rightarrow T_n^{p+1,q}(\mathbf{Z})$ . También tenemos la inclusión  $T_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \hookrightarrow T_n^{p,q+1}(\mathbf{Z})$ . Entonces para todo  $n \geq 0$ ,  $T^{*,*} = \{T^{p,q}(\Delta_n)\}_{n \geq 0}$  es un álgebra diferencial graduada (ADG) con filtración.

Sea  $X = \{X_n\}$  un conjunto simplicial y sea  $T(X) = \text{Mor}(T^{*,*}, X)$  (morfismos de conjuntos simpliciales). El teorema de Stokes implica que para cualquier  $q \geq 0$ , integración de formas moderadas induce una transformación de complejos de cocadenas  $I : T^{*,q}(X) \rightarrow C^*(X; \mathbf{Q}_q)$ . Entonces tenemos el siguiente teorema (para la demostración ver [4] y [10]).

**Teorema 3.1 (El Teorema Moderado de De Rham)** *Sea  $X$  un conjunto simplicial de tipo finito. Entonces para cada  $q \geq 1$  y para cualquier módulo  $M$  sobre  $\mathbf{Q}_q$  existe un isomorfismo natural de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$*

$$H^i(T^{*,q}(X), M) \xrightarrow{\cong} H^i(X; M)$$

para todo  $i \geq 0$ . El isomorfismo es inducido por integración.

## 4 El cálculo diferencial universal

Una versión generalizada del Cálculo Diferencial sobre variedades fue introducida por Connes ([12] and [13]) a partir del concepto de formas diferenciales no conmutativas. Karoubi [21] usó las ideas de Connes para definir el complejo de De Rham  $\Omega(X)$  no conmutativo sobre un espacio simplicial  $X$  y utilizó una técnica similar a la de Cartan para demostrar el teorema de De Rham en este contexto (ver [20].) A continuación presentamos una breve descripción del trabajo de Karoubi.

Sea  $A$  un álgebra sobre un anillo conmutativo  $\Lambda$ . Denotemos por  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  la multiplicación sobre  $A$  (todos los anillos considerados en este artículo son conmutativos y con elemento neutro, similarmente suponemos que todas las álgebras contienen elemento neutro). Las *formas diferenciales de grado  $n$*  son los elementos del producto tensorial de  $\Lambda$ -álgebras

$$T^n(A) = \underbrace{A \otimes_{\Lambda} A \otimes_{\Lambda} \cdots \otimes_{\Lambda} A}_{n+1 \text{ veces}}$$

Tenemos pues que  $\mathcal{T}^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{T}^n(A)$  es una  $\Lambda$ -álgebra con multiplicación  $\cdot : \mathcal{T}^n(A) \otimes \mathcal{T}^m(A) \rightarrow \mathcal{T}^{n+m}(A)$  definida mediante la fórmula

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot (b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_0) \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m.$$

El *diferencial* operador  $D : \mathcal{T}^n(A) \rightarrow \mathcal{T}^{n+1}(A)$  está definido por

$$\begin{aligned} D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (-1)^j a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes 1 \otimes a_j \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1. \end{aligned}$$

**Teorema 4.1** *Si  $\omega \in \mathcal{T}^n(A)$  y  $\theta \in \mathcal{T}^m(A)$ , entonces*

$$(1) \quad D^2(\omega) = 0.$$

$$(2) \quad D(\omega \cdot \theta) = D(\omega) \cdot \theta + (-1)^n \omega \cdot D(\theta) \quad (\text{la identidad de Leibniz}).$$

Entonces  $\mathcal{T}^*(A)$  es un ADG. La cohomología del complejo  $(\mathcal{T}^*(A), D)$  es trivial. Supongamos que  $A$  es una  $\Lambda$ -álgebra aumentada, con extensión  $\lambda : A \rightarrow \Lambda$  (morfismo de anillos) tal que  $\lambda(1) = 1$ . Si  $\iota_\lambda : \mathcal{T}^n(A) \rightarrow \mathcal{T}^{n-1}(A)$  es el morfismo de módulos definido por

$$\iota_\lambda(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \lambda(a_0)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n),$$

entonces  $\iota$  es una contracción de homotopía, es decir

$$D\iota_\lambda + \iota_\lambda D = 1.$$

Definamos  $\Omega^0(A) = A$  y  $\Omega^1(A) = \ker \mu$ , el módulo  $\Omega^1(A)$  sobre  $\Lambda$  es un bimódulo sobre  $A$ . Las *formas diferenciales no conmutativas de grado  $n$*  son los elementos del producto tensorial de  $A$ -módulos

$$\Omega^n(A) = \underbrace{\Omega^1(A) \otimes_A \Omega^1(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1(A)}_{n \text{ veces}}.$$

El producto de formas diferenciales está definido por yuxtaposición de productos tensoriales. Entonces la suma directa

$$\Omega^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n(A)$$

es un álgebra graduada. La *diferencial*  $d : \Omega^0(A) \rightarrow \Omega^1(A)$  está definida por la ecuación

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1.$$

Así tenemos el isomorfismo de  $\Lambda$ -módulos  $A \otimes A/\Lambda \rightarrow \Omega^1(A)$  tal que  $a \otimes \bar{b} \mapsto a db$ . Entonces  $\Omega^n(A)$  puede ser identificado con el producto tensorial de  $\Lambda$ -módulos

$$A \otimes \underbrace{A/\Lambda \otimes A/\Lambda \otimes \cdots \otimes A/\Lambda}_{n \text{ veces}}.$$

Una forma diferencial de grado  $n$  puede escribirse como una combinación lineal de términos del tipo  $a_0 da_1 da_2 \dots da_n$  y el morfismo  $d$  se extiende a las formas de grado  $n$  de  $\Omega^n(A)$  por

$$d(a_0 da_1 \dots da_n) = da_0 da_1 \dots da_n = 1 da_0 da_1 \dots da_n.$$

**Teorema 4.2** *Si  $\omega \in \Omega^n(A)$  y  $\theta \in \Omega^m(A)$ , entonces*

- (1)  $d^2(\omega) = 0$ .
- (2)  $d(\omega \cdot \theta) = d(\omega) \cdot \theta + (-1)^n \omega \cdot d(\theta)$  (la identidad de Leibniz).

**Nota 4.3** El álgebra  $\Omega^*(A)$  es un álgebra diferencial graduada y constituye la solución a un problema universal: Para un ADG  $B^*$  y un morfismo de álgebras  $f : A \rightarrow B^0$  existe un único morfismo de álgebras diferenciales graduadas  $f^* : \Omega^*(A) \rightarrow B^*$  el cual coincide con  $f$  en grado 0. El complejo  $(\Omega^*(A), d)$  se denomina el *cálculo diferencial universal* de  $A$  o el *complejo no conmutativo de De Rham* of  $A$ .

Existe una inclusión que envía  $\Omega^*(A)$  hacia  $\mathcal{T}^*(A)$ . Por otra parte, para cualquier  $n \geq 0$  existe un *operador proyección*  $J : \mathcal{T}^n(A) \rightarrow \Omega^n(A)$  dado por  $J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 da_1 \dots da_n$ .

Una forma diferencial no conmutativa  $\omega$  es *cerrada* si  $d\omega = 0$ . Decimos que  $\omega \in \Omega^n(A)$  es *exacta* si existe  $\eta \in \Omega^{n-1}(A)$  tal que  $\omega = d\eta$ . El hecho de que el complejo  $(\Omega^*(A), d)$  tiene cohomología trivial conocido como el Lema no Conmutativo de Poincaré.

**Lema 4.4** *Sea  $A$  un álgebra aumentada sobre el anillo  $\Lambda$ . Entonces toda forma cerrada  $\omega \in \Omega^*(A)$  es exacta.*

*Demostración.* Sea  $\lambda : A \rightarrow \Lambda$  una forma  $\Lambda$ -lineal con  $\lambda(1) = 1$ . Probaremos que existe una contracción homotópica  $j_\lambda : \Omega^n(A) \rightarrow \Omega^{n-1}(A)$ . Para definir  $j_\lambda$  expresamos los elementos de  $\Omega^n(A)$  como elementos de  $\mathcal{T}^{n+1}(A)$  usando la inclusión, luego aplicamos  $\iota_\lambda$ , y posteriormente aplicamos la proyección  $J$ . Así para  $\omega = a_0 da_1 \dots da_n$  obtenemos  $j_\lambda(\omega) = \lambda(a_0)a_1 da_2 \dots da_n - \lambda(a_0 a_1) da_2 \dots da_n$ . Primero demostraremos que  $j_\lambda$  está bien definida. Obviamente es suficiente probar que  $j_\lambda : \Omega^1(A) \rightarrow \Omega^0(A)$  está bien definida. Supongamos que  $\omega = a_0 da_1 \in \Omega^1(A)$ ,  $a \in \Lambda$  y  $a'_1 = a_1 + a \cdot 1 \in A$ . Entonces  $j_\lambda(a_0 da'_1) = \lambda(a_0)a'_1 - \lambda(a_0 a'_1) \cdot 1 = \lambda(a_0)a_1 - \lambda(a_0 a_1) \cdot 1 = j_\lambda(a_0 da_1)$ . Ahora para  $\omega = a_0 da_1 \dots da_n \in \Omega^n(A)$  tenemos

$$\begin{aligned}
d_{J\lambda}(\omega) + J\lambda d(\omega) &= \lambda(a_0)da_1da_2 \dots da_n - \lambda(a_0a_1) d1da_2 \dots da_n \\
&\quad + \lambda(1)a_0 da_1da_2 \dots da_n - \lambda(1 \cdot a_0) da_1 \dots da_n \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

Pero  $d\omega = 0$ . Por lo tanto  $d_{J\lambda}(\omega) = \omega$ .  $\blacksquare$

Si  $A = \{A_n\}_{n \geq 0}$  es un álgebra simplicial, entonces  $\Omega^*(A) = \{\Omega^*(A_n)\}_{n \geq 0}$  es un ADG simplicial. En efecto, si  $A = \{A_n^*\}_{n \geq 0}$ , para cada  $n$  consideramos el álgebra tensorial

$$\mathcal{T}^*(A_n) = \bigoplus_{p \geq 0} A_n^{\otimes p},$$

con los operadores  $\partial_i : A_n^{\otimes p} \rightarrow A_{n-1}^{\otimes p}$  y  $s_i : A_n^{\otimes p} \rightarrow A_{n+1}^{\otimes p}$  definidos así

$$\partial_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = \partial_i a_0 \otimes \partial_i a_1 \otimes \dots \otimes \partial_i a_p$$

y

$$s_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = s_i a_0 \otimes s_i a_1 \otimes \dots \otimes s_i a_p.$$

En forma similar podemos definir los operadores  $\partial_i$  y  $s_i$  sobre  $\Omega^*(A)$  y tenemos

**Proposición 4.5** *Sea  $A = \{A_n^*\}_{n \geq 0}$  un álgebra simplicial. Si  $D$  es la diferencial sobre  $\mathcal{T}^*(A_n)$ , entonces  $\mathcal{T}^*(A)$  y  $\Omega^*(A)$  son álgebras diferenciales graduadas simpliciales.*

Una versión no conmutativa del Teorema de De Rham fue probado por Karoubi en [20]. Karoubi consideró el caso particular en que  $A_n$  es el cociente de la  $\Lambda$ -álgebra  $\Lambda[x_0, x_1, \dots, x_n]/(x_0 + x_1 + \dots + x_n - 1)$ . Sean  $\Omega^*(A_n)$  el álgebra de formas no conmutativas sobre  $A_n$  y  $A = \{A_n\}_{n \geq 0}$ . Entonces  $\Omega^*(A_n)$  es el álgebra no conmutativa generada por los símbolos  $x_i$  y  $dx_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  y las relaciones siguientes

$$\sum_{i=0}^n x_i = 1, \quad \sum_{i=0}^n dx_i = 0 \quad \text{y} \quad x_i x_j = x_j x_i.$$

Luego

**Teorema 4.6 (El Teorema no Conmutativo de De Rham)** *Sean  $X$  un conjunto simplicial,  $A$  un álgebra simplicial sobre un anillo conmutativo  $\Lambda$  y  $\Omega^*(X) = \text{Mor}(X, \Omega^*(A))$ . Entonces existe un isomorfismo natural de módulos sobre  $\Lambda$*

$$H^i(\Omega^*(X)) \cong H^i(X; \Lambda)$$

para todo  $i \geq 0$ .

Una versión ligeramente más general del teorema anterior fue demostrada por Cenkli en [7] y [8].

## 5 Formas diferenciales no conmutativas moderadas

En [20] Karoubi propuso como problema demostrar el teorema no conmutativo de De Rham usando integración asumiendo que el anillo  $\Lambda$  contenga a los racionales. En este artículo presentamos una solución a un problema ligeramente más general construyendo una versión no conmutativa del complejo de Cenkli-Porter, el cual es construido definiendo una filtración sobre el álgebra de formas diferenciales no conmutativas  $\Omega^*(T)$  sobre  $T = \bigoplus_{n \geq 0} T_n$ , donde  $T_n$  son los polinomios restringidos al  $n$ -simplex  $\Delta_n$  (ver Ejemplo 2.4). Esta sección constituye un estudio de las propiedades principales de dicho complejo. Para empezar notemos que la Proposición 4.5 implica que  $\Omega^*(T)$  es un ADG simplicial. También establecemos la siguiente notación:  $\mathbf{Z}_+$  denota el conjunto de los enteros no negativos;  $\mathbf{Z}_+^{n+1}$  es el conjunto de índices múltiples  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  con  $\alpha_i \in \mathbf{Z}_+$ , y  $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ . Para  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$  y  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$  sea

$$x^\alpha = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

y

$$dx^\varepsilon = dx_0^{\varepsilon_0} dx_1^{\varepsilon_1} \cdots dx_n^{\varepsilon_n} = (dx_0)^{\varepsilon_0} (dx_1)^{\varepsilon_1} \cdots (dx_n)^{\varepsilon_n}.$$

Si  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$  escribimos

$$\begin{aligned} x_A^\alpha &= x_{a_1}^{\alpha_{a_1}} x_{a_2}^{\alpha_{a_2}} \cdots x_{a_p}^{\alpha_{a_p}} \\ (1 - x_A)^\alpha &= (1 - x_{a_1})^{\alpha_{a_1}} (1 - x_{a_2})^{\alpha_{a_2}} \cdots (1 - x_{a_p})^{\alpha_{a_p}} \\ dx_A^\varepsilon &= dx_{a_1}^{\varepsilon_{a_1}} dx_{a_2}^{\varepsilon_{a_2}} \cdots dx_{a_p}^{\varepsilon_{a_p}}. \end{aligned}$$

Sea  $\Omega_n(\mathbf{Z})$  el álgebra de todas las combinaciones lineales de *formas diferenciales no conmutativas* sobre  $\mathbf{Z}$

$$\omega = x^{\alpha_1} dx^{\varepsilon_1} x^{\alpha_2} dx^{\varepsilon_2} \cdots x^{\alpha_r} dx^{\varepsilon_r}, \quad \alpha_i, \varepsilon_i \in \mathbf{Z}_+^{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

con  $0 \leq x_j \leq 1$  y  $\prod_{j=0}^n x_j = 0$ . Estas son las formas diferenciales no conmutativas compatibles con las caras posteriores del cubo  $I^{n+1}$  (Ejemplo 2.4). Si  $\sum_i |\varepsilon_i| = p$  decimos que  $\omega$  es una  $p$ -forma (en particular, las 0-forms son polinomios).

Si  $\|\omega\|_j = \sum_i (\alpha_{ij} + \varepsilon_{ij})$ , definimos el *peso* de  $\omega$  por  $\|\omega\| = \max\{\|\omega\|_j : j = 0, 1, \dots, n\}$ .

Sea  $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$  el conjunto de todas las  $p$ -formas de  $\Omega_n(\mathbf{Z})$  con peso  $\|\omega\| \leq q$  y sea  $\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})\}_{p,q \geq 0}$ . Observemos que para todos  $n, p$  y  $q$ ,  $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$  es un módulo sobre  $\mathbf{Z}$  finitamente generado. La siguiente proposición se deduce directamente de la definición de  $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ .

**Proposición 5.1** Para todo  $n \geq 0$ ,  $\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})\}_{p,q \geq 0}$  es un álgebra diferencial graduada con una filtración.

Fijemos  $p \geq 0$  y  $q \geq 1$ , consideremos a  $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$  como un elemento de  $\Omega^p(T_n)$  y los operadores  $\partial_i$  y  $s_i$  sobre  $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$  como las restricciones de los respectivos operadores sobre  $\Omega^*(T)$ . Además tenemos que estas restricciones son morfismos de álgebras diferenciales graduadas. Entonces

**Proposición 5.2**  $\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z})\}_{n \geq 0}$  es un álgebra diferencial graduada simplicial.

Ahora consideremos  $0 \leq x_j \leq 1$  para  $j = 0, 1, \dots, n$  con  $\prod_j x_j = 0$ . Definimos

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) = \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_q,$$

donde  $\mathbf{Q}_q = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{q}]$  para  $q > 1$  y  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Z}$ . Sean  $\Delta_n^k$ ,  $0 \leq k \leq n$  el  $k$ -esqueleto de  $\Delta_n$  y

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^k) = \{\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n) : \omega|_{\Delta_n^k} \equiv 0\}.$$

Sea  $\Omega^{p,q}(\Delta_n^k)$  la colección de todas las combinaciones lineales sobre  $\mathbf{Q}_q$  de formas diferenciales que son no nulas sobre una cara de dimensión  $k$  de  $\Delta_n^k$ .

**Proposición 5.3** La sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1}) \xrightarrow{r} \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1}) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$  para todos  $p \geq 0$  y  $q \geq 1$  ( $r$  denota la restricción respectiva).

*Demostración.* Consideremos  $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$  con  $q \geq 1$ . Entonces  $\omega$  es una combinación lineal  $\omega = \sum_i \omega_i$ , donde cada  $\omega_i$  es no nula exactamente en una cara  $F$  de  $\Delta_n^k$ . Entonces

$$\omega|_G \equiv 0 \quad \text{si } G \text{ es cualquier } k\text{-cara de } \Delta_n^k \text{ diferente a } F.$$

Si  $F = F(A, B)$  (ver Ejemplo 2.4) donde  $A$  y  $B$  son dos conjuntos disjuntos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$  y  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-k}\}$  con  $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{k+1} \leq n$ ,  $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{n-k} \leq n$ ,  $A \cup B = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $0 \leq x_i \leq 1$ , para todo  $i \in A$ ,  $\prod_{i \in A} x_i = 0$  y  $x_j \equiv 1$  for all  $j \in B$ .

Tenemos  $\omega|_{\Delta_n^{k-1}} \equiv 0$ . Por lo tanto  $\omega$  es una combinación lineal de formas de tipo

$$f^1(x) dx^{\varepsilon_1} \dots f^s(x) dx^{\varepsilon_s},$$

donde  $f^j(x) = x_A^{\alpha_1} (1-x_A)^{\alpha_2} x_B^{\beta_1} (1-x_B)^{\beta_2} f_j(x)$  ( $f_j(x)$  es un polinomio de variable  $x$ ). Para  $F$  podemos asumir  $|\beta_2| = 0$ . Así  $f^j(x) = x_A^{\alpha_1} (1-x_A)^{\alpha_2} x_B^{\beta_1} f_j(x)$ .

Notemos que si  $|\alpha_i| = 0$  para  $i = 1, 2$  (y para todo  $j$ ), entonces  $\varepsilon_{it} \neq 0$  para algún  $t$ .

Sobre  $F$  tenemos  $f^j(x) = x_A^{\alpha_1}(1 - x_A)^{\alpha_2} f_j(x_A)$ .

Sea  $G = G(A', B')$  otra  $k$ -cara de  $\Delta_n^k$ . Si  $A = A'$  entonces existe un  $i \in B$  con  $x_i \equiv 0$ , luego  $f^j(x) = 0$  y  $\omega|_G \equiv 0$ .

Si  $A \neq A'$  entonces existe un  $i \in A$  tal que  $x_i \equiv 1$ . Entonces resulta  $\omega|_G \equiv 0$ .

Sea  $\phi(x) = x_B$ , entonces  $\phi \in \Omega^{0,1}(\Delta_n)$ . Definimos  $\omega_k = \phi \cdot \omega$ . Observemos que existe un  $i \in A$  tal que  $\|\omega_k\|_j = 1 \leq \|\omega_k\|_i = q$  para todo  $j \in B$ . Por lo tanto  $\omega_k \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ . Además

$$\omega_k|_{F(A,B)} = \phi|_{F(A,B)} \cdot \omega|_{F(A,B)} \equiv 1 \cdot \omega = \omega.$$

Si  $F(A', B')$  es otra  $k$ -cara de  $\Delta_n^k$  entonces tenemos

$$\omega_k|_{F(A',B')} = \phi|_{F(A',B')} \cdot \omega|_{F(A',B')} \equiv \phi|_{F(A',B')} \cdot 0 = 0.$$

Si  $F(E, H)$  es una  $(k-1)$ -cara de  $\Delta_n^k$  entonces existe al menos un  $i \in A$  tal que  $i \notin E$ . Entonces  $x_i$  es o bien 0 o bien 1 sobre  $F(E, H)$ . to  $\omega|_{F(E,H)} = 0$  y entonces  $\omega_k|_{F(E,H)} \equiv 0$ . Luego  $\omega_k \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$  y  $\omega_k|_{\Delta_n^k} \equiv \omega$ . ■

**Proposición 5.4** *La sucesión*

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \xrightarrow{r} \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$ , para todos  $p \geq 0$ ,  $q \geq 1$  ( $r$  denota la restricción respectiva).

*Demostración.* Para  $k = 0$  la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow \Omega^{p,q}(\Delta_n^0) \rightarrow 0,$$

es exacta, así cualquier elemento  $a \in \mathbf{Q}_q$  puede ser considerado una forma  $\omega(x_0, \dots, x_n) = a$  (un polinomio constante).

Asumimos por inducción que la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n^{k-1}) \rightarrow 0$$

es exacta. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1}) & \xrightarrow{r_1} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1}) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \\ \Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{r_2} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^k) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & \\ \Omega^{p,q}(\Delta_n^{k-1}) & \xrightarrow{=} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^{k-1}) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

La columna de la izquierda es exacta por hipótesis de inducción. La columna de la derecha es exacta por definición. La exactitud de la primera se tiene por la Proposición 5.3, luego es suficiente demostrar la exactitud de la segunda fila. Supongamos que  $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n^k)$ .

*Caso 1.* Si  $\omega \in \ker p_2$  entonces existe  $\omega' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1})$  con  $i_2(\omega') = \omega$ . Existe un  $\omega'' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$  tal que  $\omega'' = r_1(\omega')$ . Luego  $\omega = i_2(r_1(\omega')) = r_2(i_1(\omega'))$  y  $\omega \in \text{im } r_2$ .

*Caso 2.* Si  $p_2(\omega) \neq 0$ , entonces existe  $\omega' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$  tal que  $p_1(\omega') = p_2(\omega)$ . Luego

$$p_2(\omega - r_2(\omega')) = p_1(\omega)p_2(r_2(\omega')) = p_1(\omega') - p_2(r_2(\omega')) = 0.$$

Así  $\omega' - r_2(\omega') \in \ker p_2$ , entonces  $\omega' - r_2(\omega') \in \text{im } r_2$  (por *Caso 1*), luego  $\omega \in \text{im } r_2$ .

Finalmente para  $k = n - 1$  tenemos  $\Delta_n^{n-1} = \partial\Delta_n$ . Así, la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n) \rightarrow 0$$

es exacta. ■

Ahora demostramos que para todo  $q \geq 0$  el complejo  $\Omega^{*,q}(\Delta_n)$  tiene cohomología trivial. Sea  $\lambda : T \rightarrow \mathbf{Z}$  una forma lineal cualquiera con  $\lambda(1) = 1$ . Para cada  $p \geq 0$ , sea  $j_\lambda : \Omega^p(T) \rightarrow \Omega^{p-1}(T)$  la función definida en  $\omega = f^0 df^1 \dots df^p \in \Omega^p(T)$  por

$$j_\lambda(\omega) = \lambda(f^0) f^1 df^2 \dots df^p - \lambda(f^0 f^1) df^2 \dots df^p.$$

Entonces  $j_\lambda$  es una contracción homotópica (Lema 4.4). Consideremos  $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$  como un submódulo de  $\Omega^p(T_n)$  y  $j_\lambda$  restringida a  $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$ . Supongamos que

$$\omega = x^{\alpha_1} dx^{\varepsilon_1} \dots x^{\alpha_r} dx^{\varepsilon_r} = \sum f^0 df^1 \dots df^p.$$

Observemos que  $\|j_\lambda(\omega)\|_j \leq \|\omega\|_j$  para todo  $j$ . Por lo tanto  $\|j_\lambda(\omega)\| \leq \|\omega\| \leq q$  y  $j_\lambda(\omega) \in \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$ . Así  $j_\lambda : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$  es una contracción homotópica (por el Lema 4.4).

Si  $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$  y  $d\omega = 0$  decimos que  $\omega$  es *cerrada*. Decimos que  $\omega$  es *exacta* si existe  $\eta \in \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$  tal que  $\omega = d\eta$ . Entonces tenemos el siguiente

**Lema 5.5 (El Lema no Conmutativo Moderado de Poincaré)** *Si  $\omega$  está en  $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$  y es una forma cerrada, entonces  $\omega$  es exacta.*

## 6 Integración de formas no conmutativas moderadas

En esta sección presentamos la integración de formas diferenciales no conmutativas moderadas y usamos este concepto para definir un morfismo de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$   $I : \Omega^{*,q}(\Delta_n) \rightarrow C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$ . También establecemos y demostramos

una versión no conmutativa del teorema de Stokes la cual nos permite utilizar a  $I$  para inducir un morfismo de complejos el cual juega un papel importante en el teorema de De Rham.

Sea  $\Omega^{*,*}(\Delta_n)$  el álgebra de las formas diferenciales no conmutativas moderadas con variables  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Sea  $T^{*,*}(\Delta_n)$  el álgebra de las formas diferenciales de Cenk-Porter con coeficientes en  $\mathbf{Q}_q$  sobre el cubo estándar  $I^{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ . Definimos  $F : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow T^{p,q}(\Delta_n)$  como sigue: si  $\omega \in \Omega^{0,q}(\Delta_n)$  o  $\omega = dx_j \in \Omega^{1,1}(\Delta_n)$  entonces  $F(\omega) = \omega$ ; if  $\omega = f^0 df^1 \dots df^p \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$  para  $p > 1$ , luego  $F(f^0 df^1 \dots df^p) = f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^p$ . Entonces  $F : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow T^{p,q}(\Delta_n)$  define un morfismo de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$ . Observemos que para todo  $p \geq 0$  tenemos

$$F(f^0 df^1 \dots df^p) = F(f^0) F(df^1) \wedge \dots \wedge F(df^p).$$

En particular si  $\omega \in \Omega^{p_1,q_1}(\Delta_n)$  y  $\eta \in \Omega^{p_2,q_2}(\Delta_n)$  entonces  $F$  es un morfismo de álgebras, es decir

$$F(\omega \cdot \eta) = F(\omega) \wedge F(\eta).$$

Para demostrar esta identidad es suficiente considerar  $\omega = f^0 df^1, \eta = g^0 dg^1 \in \Omega^1(T_n)$ .

Fórmulas explícitas para calcular  $F(\omega)$  se muestran en [30]. Similarmente, las siguientes proposiciones son casi obvias.

**Proposición 6.1** *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1,q}(\Delta_n) \\ F_p \downarrow & & \downarrow F_{p+1} \\ T^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{d} & T^{p+1,q}(\Delta_n) \end{array}$$

conmuta para todo  $p \geq 0$ .

**Proposición 6.2** *Sea  $p \geq 0, q \geq 1$ . If  $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ . Si  $G$  es una  $p$ -cara de  $\Delta_n$ , entonces*

$$\int_G F(\omega) \in \mathbf{Q}_q.$$

Además  $F$  es una función simplicial. Si  $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$  y  $\sigma : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$  es un  $p$ -simplex definimos la integral de  $\omega$  sobre  $\sigma$  por

$$\int_\sigma \omega = \int_\sigma F(\omega) = \int_{\Delta_p} \sigma^* F(\omega).$$

Si  $\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes a_i \in C_p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$ , entonces la integral de  $\omega$  sobre  $\sigma$  está definida por

$$\int_\sigma \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

**Proposición 6.3 (El Teorema no Conmutativo de Stokes)** *Sea  $\sigma$  una  $p$ -cadena sobre  $\Delta_n$  y supongamos que  $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ . Entonces*

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

*Demostración.* Supongamos que  $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$  y sea  $\sigma : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$  un  $p$ -simplex. Por la Proposición 6.1 y por el teorema (clásico) de Stokes tenemos

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\sigma} F(d\omega) = \int_{\sigma} d(F(\omega)) = \int_{\partial\sigma} F(\omega) = \int_{\partial\sigma} \omega. \quad \blacksquare$$

Denotemos por  $(C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q), \delta)$  el complejo estándar de cocadenas sobre  $\Delta_n$  con coeficientes en  $\mathbf{Q}_q$ . Sea

$$I : \Omega^{*,q}(\Delta_n) \rightarrow C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$$

el morfismo de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$  definido así: dadas  $\sigma \in C_p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$  y  $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$

$$I_p(\omega)(\sigma) = \int_{\sigma} \omega.$$

El teorema de Stokes implica que  $I$  es una morfismo de complejos de cocadenas y además tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^{p,q}(\Delta_{n-1}) & \xleftarrow{\partial_i} & \Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{s_i} & \Omega^{p,q}(\Delta_{n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C^p(\Delta_{n-1}; \mathbf{Q}_q) & \xleftarrow{\tilde{\partial}_i} & C^p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\tilde{s}_i} & C^p(\Delta_{n+1}; \mathbf{Q}_q), \end{array}$$

para  $0 \leq i \leq n$ . Entonces  $I$  es una función simplicial.

**Proposición 6.4** *El diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k) & \xrightarrow{i} & \Omega^{p,q}(\Delta_k) & \xrightarrow{r} & \Omega^{p,q}(\partial\Delta_k) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & C^p(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{i} & C^p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{r} & C^p(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & 0, \end{array}$$

*conmuta para todo  $p \geq 0$ ,  $q \geq 1$ . (Los operadores  $i$  y  $r$  son las inclusiones y restricciones respectivas).*

*Demostración.* Sean  $\sigma \in C_p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q)$  y  $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)$ , entonces  $r(\omega) = r(i(\omega))$ . Luego

$$I(i(\omega))(\sigma) = \int_{\sigma} i(\omega) = \int_{\sigma \cap \partial\Delta_k} \omega + \int_{\sigma - (\sigma \cap \partial\Delta_k)} \omega = \int_{\sigma - (\sigma \cap \partial\Delta_k)} \omega = i(I(\omega))(\sigma).$$

Por otra parte tenemos

$$I(r(\omega))(\sigma) = I(\sigma)(r(\omega)) = \int_{\sigma} r(\omega) = \int_{\sigma} \omega|_{\partial\Delta_k} = \int_{\sigma \cap \partial\Delta_k} \omega = I(r(\sigma))(\omega). \quad \blacksquare$$

## 7 El teorema no conmutativo moderado de De Rham

En esta sección construimos el complejo moderado de De Rham o el complejo no conmutativo de Cenkl y Porter sobre un conjunto simplicial de tipo finito. Seguidamente usamos las versiones no conmutativas del Lema de Poincaré y del Teorema de Stokes para demostrar una versión no conmutativa del Teorema de De Rham.

Sean  $X$  un conjunto simplicial de tipo finito y  $X_n$  la colección de  $n$ -simplices no triviales en  $X$ . Una *forma diferencial no conmutativa tipo  $(p, q)$*  sobre  $X$  es una función simplicial  $\omega : X_n \rightarrow \Omega^{p,q}(\Delta_n)$  (en otras palabras  $\omega$  es una función tal que para cada  $G \in X_n$  y cualquier cara  $F$  de  $G$ ,  $\omega(F)$  es la restricción de  $\omega(G)$  a  $F$ ). La colección de todas estas formas se denota por  $\Omega^{p,q}(X)$ .

Para una  $p$ -cadena  $\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes a_i \in C_p(X; \mathbf{Q}_q)$ ,  $\sigma_i : \Delta_p \rightarrow X$  y  $\omega \in \Omega^{p,q}(X)$  definimos

$$\int_{\sigma} \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta_p} \omega|_{\sigma_i}$$

así podemos definir la función  $I : \Omega^{p,q}(X) \rightarrow C^p(X; \mathbf{Q}_q)$  por

$$I_p(\omega)(\sigma) = \int_{\sigma} \omega.$$

Entonces

$$\delta I_p(\omega)(\sigma) = I_p(\omega)(\partial\sigma) = \int_{\partial\Delta_p} \omega|_{\partial\sigma}.$$

Por otra parte

$$I_{p+1}(d\omega)(\sigma) = I_p(d\omega)(\sigma) = \int_{\Delta_p} d\omega|_{\sigma}.$$

Así la integración induce un morfismo de complejos de cocadenas. Entonces tenemos el siguiente

**Teorema 7.1** *Sea  $X$  un conjunto simplicial de tipo finito. Entonces para todo  $q \geq 1$  la función*

$$I : H^i(\Omega^{*,q}(X)) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \mathbf{Q}_q),$$

*inducida por integración es un isomorfismo de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$  para todo  $i \geq 0$ .*

*Demostración.* Usamos inducción sobre los esqueletos de  $X$ . Para  $k = 0$  el enunciado es cierto porque

$$H^i(\Omega^{*,q}(X)) = \begin{cases} \mathbf{Q}_q, & \text{si } i = 0, \\ 0, & \text{si } i > 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad H^i(X; \mathbf{Q}_q) = \begin{cases} \mathbf{Q}_q, & \text{si } i = 0, \\ 0, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Supongamos que el enunciado es cierto para los esqueletos de dimensión  $\ell$ ,  $X_{\ell}$  de  $X$  para  $\ell < k$ .

Por la Proposición 6.4 se sigue que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1}) & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_k) & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_{k-1}) \rightarrow 0 \\ & & I \downarrow & & I \downarrow & & I \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C^*(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^*(X_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^*(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) \rightarrow 0 \end{array}$$

es conmutativo. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots \rightarrow & H^{i-1}(\Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1})) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1})) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(X_k)) & \rightarrow & H^i(\Omega^{*,q}(X_{k-1})) \rightarrow \cdots \\ & \downarrow 1 & & \downarrow \kappa & & \downarrow I & & \downarrow 1 \\ \cdots \rightarrow & H^{i-1}(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(X_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & H^i(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Las filas son exactas e  $\iota$  es un isomorfismo por hipótesis. Probaremos que  $\kappa$  es un isomorfismo. Sea  $\{\Delta_{k,j} : j \in J\}$  el conjunto de los  $k$ -simplices de  $X_k$ . Entonces

$$\Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1}) \cong \bigoplus_j \Omega^{*,q}(\Delta_{k,j}, \partial\Delta_{k,j})$$

y

$$C^*(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) \cong \bigoplus_j C^*(\Delta_{k,j}, \partial\Delta_{k,j}; \mathbf{Q}_q)$$

son isomorfismos de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$ . Entonces es suficiente probar que la integración induce un isomorfismo

$$I : H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)) \rightarrow H^i(C^*(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q)).$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo (Proposición 6.4)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k) & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\Delta_k) & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\partial\Delta_k) \rightarrow 0 \\ & & I \downarrow & & I \downarrow & & I \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C^p(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^p(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) \rightarrow 0, \end{array}$$

La primera fila es exacta por la Proposición 5.4.

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots \rightarrow & H^{i-1}(\Omega^{*,q}(\partial\Delta_k)) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k)) & \rightarrow & H^i(\Omega^{*,q}(\partial\Delta_k)) \rightarrow \cdots \\ & \downarrow 1 & & \downarrow \kappa & & \downarrow I & & \downarrow 1 \\ \cdots \rightarrow & H^{i-1}(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & H^i(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Por lo tanto  $I$  es un isomorfismo por el “Lema Cinco”<sup>1</sup>. ■

Finalmente, aplicando el teorema de Künneth concluimos con nuestra versión generalizada del teorema de De Rham. Sea  $M$  un módulo sobre  $\mathbf{Q}_q$  y sean

<sup>1</sup>“the five lemma” es un resultado clásico en álgebra homológica y topología algebraica, y algunas veces se encuentra en el estudio de módulos. El nombre está sugerido porque se trata de dos sucesiones con cinco módulos cada una y a partir de información sobre la exactitud de las sucesiones y cuatro de los morfismos verticales se deduce que el morfismo vertical central es un isomorfismo. Ver e.g., [24, p. 169], [27, p. 14 y 365] y [36, pp. 185-186]

$\omega = \eta \otimes a \in \Omega^{p,q}(X) \otimes M$ , y  $\sigma = \theta \otimes b \in C_p(X; \mathbf{Q}_q) \otimes M$ . Entonces la *integral de  $\omega$  sobre  $\sigma$*  está definida por

$$\int_{\sigma} \omega = I(\eta)(\theta) \cdot a \otimes b = \int_{\theta} \eta \cdot a \otimes b.$$

Así la integración define un morfismo de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$ ,  $I : \Omega^{p,q}(X) \otimes M \rightarrow C^p(X; M)$ . Entonces tenemos

**Teorema 7.2** *Sea  $X$  un conjunto simplicial de tipo finito. Entonces para  $q \geq 1$  y para cualquier módulo  $M$  sobre  $\mathbf{Q}_q$  existe un isomorfismo natural de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$*

$$H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \xrightarrow{\cong} H^i(X; M)$$

para todo  $i \geq 0$ . El isomorfismo es inducido por integración.

Sea  $f : M_1 \rightarrow M_2$  un morfismo de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$ . Entonces para cada  $p \geq 0$ ,  $f$  induce dos morfismos de módulos sobre  $\mathbf{Q}_q$   $f^* : H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) \rightarrow H^i(\Omega^{p,q}(X), M_2)$  y  $f^* : H^i(X; M_1) \rightarrow H^i(X; M_2)$ . La palabra “natural” en el teorema anterior significa que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) & \xrightarrow{I} & H^i(X; M_2) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) & \xrightarrow{I} & H^i(X; M_2) \end{array}$$

conmuta para todo  $p \geq 0$ ,  $i \geq 0$ .

Como mencionamos anteriormente, se pueden utilizar la técnica de Cartan para demostrar la existencia de un isomorfismo  $H^i(\Omega^*(X)) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \Lambda)$ , para un anillo conmutativo  $\Lambda$  con elemento neutro. Dos demostraciones ligeramente distintas de este hecho se encuentran en [7] y [8]. El teorema no conmutativo de De Rham demostrado por Cenk es una generalización del resultado que Karoubi presentó en [20]. En ese mismo *paper* Karoubi presentó como problema la versión del teorema de De Rham como lo hemos presentado aquí.

## 8 Ejemplo

Concluimos este artículo con el examen de un ejemplo concreto para ilustrar el papel del teorema de De Rham y para apreciar mejor la diferencia entre las técnicas en Geometría no Conmutativa y su contraparte clásica. Otros ejemplos similares se encuentran en [30].

**Ejemplo 8.1** Consideremos el complejo  $\Omega^{*,3}(S^1)$  de formas no conmutativas moderadas de peso  $\leq 3$  sobre la circunferencia  $S^1$ . En este caso el anillo sobre el

cual se consideran las álgebras es  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$ . Resulta fácil (aunque un poco largo) verificar que  $H^0(\Omega^{*,3}(S^1)) \cong H^0(S^1, \mathbf{Q}_3) \cong \mathbf{Q}_3$  y que  $H^1(\Omega^{*,3}(S^1)) \cong H^1(S^1, \mathbf{Q}_3) \cong \mathbf{Q}_3$

Consideremos la triangulación de  $S^1$  con 0-simplices  $v_0, v_1$  y  $v_2$ , y 1-simplices  $e_0, e_1$  y  $e_2$  orientados en sentido antihorario. Podemos considerar cada 1-simplice  $e_i$  como la imagen bajo una función continua e inyectiva  $\psi_i : \Delta_1 \rightarrow S^1$ . Sea  $\phi_i = \psi^{-1} : e_i \rightarrow \Delta_1$ ,  $i = 0, 1, 2$  (recordemos que el 1-simplice  $\Delta_1$  es considerado como la unión de las dos caras posteriores del 2-cubo  $I^2$  en  $\mathbf{R}^2$ , como en el Ejemplo 2.4.

Ahora supongamos que  $\omega \in \Omega^{2,3}(S^1)$ , es una función simplicial tal que  $\omega(e_i) = \omega_i \in \Omega^{2,3}(\Delta_1) = \Omega_1^{2,3}(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}_3$ , con

$$\begin{aligned}\omega_0(x_0, x_1) &= a_0 dx_0^2 + a_1 dx_1^2 + a_2 x_0 dx_0^2 + a_3 x_1 dx_1^2 + a'_2 dx_0^2 x_0 + a'_3 dx_1^2 x_1 \\ \omega_1(y_0, y_1) &= b_0 dy_0^2 + b_1 dy_1^2 + b_2 y_0 dy_0^2 + b_3 y_1 dy_1^2 + b'_2 dy_0^2 y_0 + b'_3 dy_1^2 y_1 \\ \omega_3(z_0, z_1) &= c_0 dz_0^2 + c_1 dz_1^2 + c_2 z_0 dz_0^2 + c_3 z_1 dz_1^2 + c'_2 dz_0^2 z_0 + c'_3 dz_1^2 z_1.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\omega_0(x_0, x_1) &= a_2 dx_0^3 + a_3 dx_1^3 + a'_2 dx_0^3 + a'_3 dx_1^3 \\ \omega_1(y_0, y_1) &= b_2 dy_0^3 + b_3 dy_1^3 + b'_2 dy_0^3 + b'_3 dy_1^3 \\ \omega_3(z_0, z_1) &= c_2 dz_0^3 + c_3 dz_1^3 + c'_2 dz_0^3 + c'_3 dz_1^3.\end{aligned}$$

Por lo tanto si  $d\omega = 0$  tenemos  $a_i = -a'_i$ ,  $b_i = -b'_i$  y  $c_i = -c'_i$ , para  $i = 1, 2$ . Luego  $\dim \ker(d : \Omega^{2,3}(\Delta_1) \rightarrow \Omega^{3,3}(\Delta_1)) = 12$ . Similarmente se puede verificar que  $\dim \text{im}(d : \Omega^{1,3}(\Delta_1) \rightarrow \Omega^{2,3}(\Delta_1)) = 12$ , de donde  $H^2(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^2(S^1, \mathbf{Q}_3)$ .

Ahora supongamos que  $\eta \in \Omega^{3,3}(S^1)$ , es una función simplicial tal que  $\eta(e_i) = \eta_i \in \Omega^{3,3}(\Delta_1) = \Omega_1^{3,3}(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}_3$ , con

$$\begin{aligned}\eta_0(x_0, x_1) &= a_0 dx_0^3 + a_1 dx_1^3 \\ \eta_1(y_0, y_1) &= b_0 dy_0^3 + b_1 dy_1^3 \\ \eta_3(z_0, z_1) &= c_0 dz_0^3 + c_1 dz_1^3.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\eta = d\zeta$ , donde  $\zeta \in \Omega^{2,3}(\Delta_1)$  es del tipo

$$\begin{aligned}\zeta_0(x_0, x_1) &= \frac{a_0}{3} x_0 dx_0^2 + \frac{a_0}{3} dx_0 x_0 dx_0 + \frac{a_0}{3} dx_0^2 x_0 \\ &\quad + \frac{a_1}{3} x_1 dx_1^2 + \frac{a_1}{3} dx_1 x_1 dx_1 + \frac{a_1}{3} dx_1^2 x_1 \\ \zeta_1(y_0, y_1) &= \frac{b_0}{3} y_0 dy_0^2 + \frac{b_0}{3} dy_0 y_0 dy_0 + \frac{b_0}{3} dy_0^2 y_0 \\ &\quad + \frac{b_1}{3} y_1 dy_1^2 + \frac{b_1}{3} dy_1 y_1 dy_1 + \frac{b_1}{3} dy_1^2 y_1 \\ \zeta_3(z_0, z_1) &= \frac{c_0}{3} z_0 dz_0^2 + \frac{c_0}{3} dz_0 z_0 dz_0 + \frac{c_0}{3} dz_0^2 z_0 \\ &\quad + \frac{c_1}{3} z_1 dz_1^2 + \frac{c_1}{3} dz_1 z_1 dz_1 + \frac{c_1}{3} dz_1^2 z_1.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $H^3(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^3(S^1, \mathbf{Q}_3)$  (note que 3 es invertible en  $\mathbf{Q}_3$ ).

Finalmente, notemos que  $H^i(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^i(S^1, \mathbf{Q}_3)$  es trivial para todo  $i > 3$ , pues si  $\theta \in \Omega^{4,3}(S^1)$ , entonces  $\theta = 0$ .

## Notas

Concluimos este artículo con algunos comentarios que pueden servir de guía al lector interesado en más detalles sobre el tema.

Primeramente, una descripción interesante de la evolución del teorema clásico de De Rham y su importancia en el desarrollo de la Topología, así como del desarrollo histórico mismo de esta disciplina matemática durante la primera mitad del siglo XX, se encuentra en el excelente libro de Dieudonné [15]. Un estudio detallado del teorema de De Rham en el contexto moderno se encuentra casi en cualquier libro básico de Geometría Diferencial o de Topología Diferencial, así que los clásicos de Spivak [37] y Warner [39] son suficientes. Por supuesto, un libro que resulta de gran valor es el original de De Rham [34] (dicho sea de paso, existe una versión en inglés por Springer-Verlag, 1984).

Para un estudio de teoría de cohomología los libros de Cartan y Eilenberg [6], Mac Lane [27] y Spanier [36] son fuertemente recomendados. Para la lectura de estos tres libros conviene tener al alcance algún libro sobre teoría de categorías, como por ejemplo el de Mac Lane [26]. allí encontrará el lector algún material sobre objetos simpliciales, pero si se necesita algo más especializado el libro de May [29] será de gran ayuda.

El teorema de De Rham demostrado por H. Cartan fue publicado en la *Nota* [5] (con mayores detalles se encuentra desarrollado en las notas de curso de Cenkl [7]). La primera versión del teorema no conmutativo de De Rham desarrollada por Karoubi apareció en [21]. Para algunas de sus aplicaciones puede consultarse los trabajos de dos de sus discípulos: la tesis de Battikh [3] y la *Nota* de Mouet [32].

El desarrollo de la Geometría no conmutativa es, principalmente, obra de Connes, quien presenta sus ideas originales en el clásico [12] y que posteriormente amplió en [13]. Algunos intentos notables se han realizado para presentar el tema (o algunas de sus partes) en forma más “simplificada,” en particular se encuentran los trabajos de Gracia-Bonda, Várilly y Figueroa [17], Kassel [22] y Madore [28]. Para algunas aplicaciones resultan muy interesantes los artículos de Baez [1] y [2] y, por supuesto, el de Connes [14].

El estudio de formas originales cúbicas con aplicaciones del teorema moderado de De Rham se encuentran en los trabajos de Cenkl y Porter [10,11]. El estudio de las propiedades del denominado complejo de Cenkl y Porter fue publicado como notas de un seminario desarrollado por Scheerer, Schuch y Vogt en [35]. En ese mismo trabajo se introduce el complejo de corrientes moderadas de De Rham (duales algebraicos de las formas moderadas) y se demuestra un teorema de De Rham para homología. Siguiendo esa idea, Mejías en [30] construye una versión no conmutativa del complejo de corrientes moderadas de De Rham y demuestra el correspondiente teorema para homología después de haber aplicado técnicas similares a las de Cenkl y Porter para la exploración

del complejo de De Rham de formas diferenciales no conmutativas moderadas, tal como se presentan en este artículo.

## Referencias

- [1] N. Baez, R-commutative Geometry and Quantization of Poisson Algebras, *Adv. Math.* **95** (1992), 61-91.
- [2] N. Baez, Differential Calculi on Quantum Vector Spaces with Hecke-Type Relations, *Lett. Math. Phys.* **23** (1991), 133-141.
- [3] N. Battikh, *Cup  $i$ -Product sur les Formes Différentielles non Commutatives et Excision en  $K$ -Théorie*, (Disertación Doctoral) Universidad de Paris VII, Paris, 1997.
- [4] P. Boullay, F. Kiefer, M. Majewski, M. Stelzer, H. Scheerer, M. Unsöld y E. Vogt, *Tame Homotopy Theory via Differential Forms*, Freie Universität Berlin, Preprint No. 223. Berlin, 1986.
- [5] H. Cartan, Théories Cohomologiques, *Invent. Math.* **35** (1976) 261-271.
- [6] H. Cartan y S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1999.
- [7] B. Cenk, *Noncommutative Geometry*, Course Notes, Northeastern University, Boston, 1998.
- [8] B. Cenk, Noncommutative Differential Forms and Cohomology Operations, (*preprint*).
- [9] B. Cenk, G. Hector y M. Saralegi, Cohomologie d'Intersection Moderee. Un Theoreme de de Rham, *Pacific J. Math.* **169** (1976), 235-289.
- [10] B. Cenk y R. Porter, De Rham Theorem with Cubical Forms, *Pacific J. Math.* **112** (1984), 35-48.
- [11] B. Cenk y R. Porter, Differential Forms and Torsion in the Fundamental Group, *Adv. Math.* **48** (1983), 189-204.
- [12] A. Connes, Noncommutative Differential Geometry, *Publ. Math. IHES* **62** (1985), 257-360.
- [13] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [14] A. Connes, Noncommutative Geometry and Reality, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 6194-6231.

- [15] J. A. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [16] P. Goerss, Simplicial Chains over a Field and  $p$ -local Homotopy Theory, (*preprint*).
- [17] J. M. Gracia-Bonda, J. C. Várilly y H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [18] P. Griffiths y J. Morgan, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, Birkhäuser, Boston, 1981.
- [19] M. Karoubi, Algèbres Tressées et  $q$ -Cohomologie, (*preprint*).
- [20] M. Karoubi, Formes Différentielles non Commutatives et Cohomologie a Coefficients Arbitraires, *Trans. Amer. Math. Soc.* **374** (1995), 4277-4299.
- [21] M. Karoubi, Homologie Cyclique et  $K$ -Théorie, *Astérisque* **149** (1987), 1-147.
- [22] C. Kasel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, Nueva York, 1995.
- [23] I. Kris,  $p$ -adic Homotopy Theory, *Topology and its Applications* **52** (1993), 279-308.
- [24] S. Lang, *Algebra*, (tercera edición), Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.
- [25] D. Lehmann, Théorie Homotopique des Formes Différentielles, *Astérisque* **45** (1987).
- [26] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (segunda edición), Springer-Verlag, Nueva York, 1998.
- [27] S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, Nueva York, 1976.
- [28] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, (segunda edición), London Mathematical Society Lecture Note Series 206, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [29] J. P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1967.
- [30] F. Mejías, The Noncommutative Tame De Rham Theorem, *International J. Math. Sci.* **30** (2002), 667-696.
- [31] R. Miller, De Rham Cohomology with Arbitrary Coefficients, *Topology* **174** (1978), 193-203.

- [32] C. Mouet,  $q$ -Cohomologie non Commutative, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* (1996), 849-851.
- [33] B. Ndongol y M. El haouari, Algèbres Quasi-commutatives at Carrés de Steenrod, *Pub. Irma* **39** (1996), 1-26.
- [34] G. de Rham. *Variétés Différentiables: Forms, Courants, Formes Harmoniques*, Herman, Paris, 1960.
- [35] H. Scheerer, K. Schuch y E. Vogt, *Tame Homotopy Theory via de Rham Currents*, Freie Universität Berlin, Preprint No. A91-20, Berlin, 1991.
- [36] M. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Nueva York, 1966.
- [37] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (volúmenes I-V, tercera edición), Publish or Perish, Houston, 1999.
- [38] D. Sullivan, Infinitesimal Computations in Topology, *Publ. Math. IHES* **47** (1977), 269-331.
- [39] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, Nueva York, 1983.
- [40] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957.

FERNANDO MEJÍAS,  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES,  
NÚCLEO UNIVERSITARIO "RAFAEL RANGEL", TRUJILLO.  
fmejias@ula.ve

# Completeness conditions in certain Weyl complexes, combinatorics and parsimony

Mari Sano \*

## Abstract

We describe the combinatorial relationship between different completeness theorems in certain Buchsbaum-Rota resolutions of Weyl modules. In particular this gives a completely elementary, combinatorial description of this Buchsbaum-Rota construction that shows that it is a resolution.

## 1 Introduction

The context of this work is the Buchsbaum-Rota program of constructing resolutions of Weyl modules in a characteristic free setting, using Letter-Place methods.

The study of resolutions of Weyl modules has several motivations: the representation theory of  $GL(n)$  [3], where the Giambelli and Jacobi-Trudy identities appear in the guise of Euler-Poincaré characteristic of the resolution; the study of determinantal ideals [4, 5, 2, 12], intertwining numbers [5, 6] and the invariant theory of  $GL(n)$ , all in a characteristic free context [9]. We are specially interested in the use of *Letter-Place methods*, which in several instances have been essential in cutting down the amount of computation needed to arrive at the desired resolutions.

In [8], Buchsbaum and Rota constructed a characteristic-free resolution over the Schur algebra of 3-rowed Weyl modules with at most one triple overlap, using Letter-Place methods and a generalized bar complex. The fact that the Buchsbaum-Rota complex is a resolution is proven through a highly indirect proof, using the fundamental exact sequence.

The series of papers [14, 15] and the present one is an attempt to understand this resolution in a more elementary, combinatorial way. The usefulness of this understanding lies in the fact that the general program is to construct resolutions for all Weyl modules using Letter-Place methods; a deep combinatorial

---

\*Supported by CNPq post-doctoral grant no. 150118/2003-1

understanding of the known resolutions is a necessary step for this program to succeed.

The main objective of this paper is to describe the combinatorial identities relating the different “Completeness theorems” produced by the author in the study of the Buchsbaum-Rota resolutions of 3-rowed Weyl modules ([14, 15]); this combinatorial relationship gives a neat way of organizing the computation that implies that  $d^2 = 0$ , and therefore gives a completely elementary proof of the fact that the Buchsbaum-Rota construction is a complex and, by the homotopy constructed in [15] assuming  $d^2 = 0$ , a resolution; in short, [14, 15] and this paper gives a proof of the Buchsbaum-Rota resolution that uses exclusively the combinatorics of the divided powers and the polarization operators applied to bistandard bitableaux. Let us remark in the standard bar complex, the proof that it gives a resolution also goes through these two stages: constructing the homotopy, and then showing that it is, in fact, a complex (cf. [13], page 287). Thus the sequence of papers [14, 15], with the weak and strong completeness theorems, plus the present one, can be seen as the analogous process for this particular Buchsbaum-Rota generalized bar complex in Letter-Place methods.

Let us describe this sequence of papers [14, 15] and this one in somewhat more detail:

In [14], a basis for the syzygies of the Buchsbaum-Rota resolution was constructed under certain conditions; a fundamental element of the construction is the division of the basis of each term in the resolution into two complementary subsets, the *essential* and *non-essential* elements. This division satisfies two conditions: the *completeness condition*, that roughly says that there are “enough” essential elements, and the *rank condition*, that says that there are *just* enough of them.

Then in [15], it was realized that a strong form of the completeness theorem would produce a splitting contracting homotopy for the Buchsbaum-Rota complex, (not assuming that it is a resolution) thus giving a more elementary proof of the fact that the complex is a resolution.

For a more precise description of these completeness theorems, see section 3. In this paper we show that certain terms (the “essential correcting terms”  $M_\alpha$  and  $M'_\alpha$  of section 3) in the completeness theorems, which look very different in the strong completeness theorem of [15] compared to the terms in the weak completeness theorem of [14], are in fact equal. As we have said, this equality will show that the Buchsbaum-Rota construction is a resolution without assuming anything at all.

The paper is organized as follows: in section 2 we give the minimum background necessary on Letter-Place and generalized bar complex construction of [8] to carry out the computations. Then in section 3 we describe briefly the Weak and Strong Completeness Theorems proved in [14] and [15], respectively. In that section we also hope that the examples given shed some light into the

heuristics of how to find the essential/non-essential partition and its relation to the “parsimony principle” mentioned in [9]. And finally in section 4 we show how these completeness theorems are related via combinatorial identities, in particular showing that  $d^2 = 0$ . Section 5 contains some concluding remarks.

**A remark on notation.** Sometimes, such elements -especially linear combinations of them- do not fit in a single line. In such cases what should be a single line splits into several lines in order to fit the printed page. Also, the binomial coefficient  $\binom{k}{n}$  will be denoted by the more compact version  $B_n^k$ .

## 2 Notation and Preliminaries

In this section we give a very brief introduction, in fact just setting the notation, to the Buchsbaum-Rota resolution of 3-rowed Weyl modules using Letter-Place. For more in-depth descriptions, the reader can look at [11] (Letter-Place), [9], [14].

Letter-Place is a symbolic method which generalizes the ordinary algebra of polynomials in a set of  $A$  variables with integer coefficients. The set  $A$  is the union of three disjoint subsets  $A^+$ ,  $A^0$  and  $A^-$ ; whose elements are called positively, neutral and negatively signed. These variables satisfy the following rules:

1) Positively signed variables act like the divided powers. (Recall that the divided power functor is isomorphic to the symmetric powers in characteristic zero but not in general characteristic, [1])

$$a^{(i)}a^{(j)} = B_i^{i+j}a^{(i+j)},$$

$$(a^{(i)})^{(j)} = \frac{(ij)!}{j!(i!)^j}a^{(ij)},$$

and

$$(a + b)^i = \sum_{j+k=i} a^{(j)}b^{(k)}$$

These variables and their divided powers commute.

2) Neutral variables behave like ordinary polynomial variables; in particular they also commute.

3) Negatively signed variables satisfy the rules of ordinary exterior algebra:  $ab = -ba$  and  $a^2 = b^2 = 0$ .

We take the following discussion of Letter-Place from [9]:

The main idea is to note not only the basis elements of a given tensor product, but also to keep track of their “places”. Thus we have the positive alphabet, or basis of the underlying free module, *and* we also have a ‘place alphabet’ of positive places. For example, an element  $w \otimes w' \in D_p \otimes D_q$  would be written, in letter-place algebra, as  $(w|1^{(p)})(w'|2^{(q)})$  to indicate that it is the tensor product of a basis element of degree  $p$  in the first factor, and one of degree  $q$  in the second. This is then written in double tableau form as

$$\left( \begin{array}{c|c} w & 1^{(p)} \\ w' & 2^{(q)} \end{array} \right).$$

In this paper, instead of denoting the place alphabet by  $1, 2, 3, \dots$ , we denote it by  $a, b, c, \dots$  (this is in order to be consistent with the notation in [7] and [8]).

Let us also use the symbol  $(v|a^{(r)}b^{(s)})$  to denote  $\sum v(r) \otimes v(s)$ , where this stands for the diagonalization of the element  $v \in D_{r+s}$  into its image under the diagonalization map in  $D_r \otimes D_s$ . Then we also have double tableaux

$$\left( \begin{array}{c|c} w & a^{(p)}b^{(k)} \\ w' & b^{(q-k)} \end{array} \right),$$

which means the element  $\sum w(p) \otimes w(k)w' \in D_p \otimes D_q$ . Ordering the basis elements of the underlying free module and the place alphabet as well, we can now talk about ‘standard’ and ‘double standard’ tableaux. By the standard basis theorem ([11]), the set of double standard tableaux form a basis for  $D_p \otimes D_q$ . In a similar fashion, the Letter-Place language is used in  $D_{p_1} \otimes D_{p_2} \otimes \dots \otimes D_{p_n}$  where the ‘places’ run from 1 to  $n$ ., and also with mixed products of divided and exterior powers, and negative and positive places. In this article, we will work mainly with three factors, so that our place alphabet will be  $\{a, b, c\}$ .

We will be working mainly on the set of standard tableaux

$$\left\{ \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right), \text{ where } a < b < c \text{ are positive places} \right\}.$$

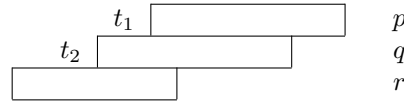
In this set, the polarization operators are given by

$$D_{ba}^{(k)} \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) =$$

$$B_k^{k+\sigma_1} \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta-k)} & b^{(k+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned}
 & D_{cb}^{(k)} \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) = \\
 & \sum_{i=0}^k B_{\rho_1}^{i+\rho_1} B_{\rho_2}^{k-i+\rho_2} \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1-i)} & c^{(i+\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2-k+i)} & c^{(k-i+\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right), \\
 & D_{ca}^{(k)} \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) = \\
 & B_{\rho_1}^{k+\rho_1} \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta-k)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(k+\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Let us describe the Buchsbaum-Rota resolution of 3-rowed Weyl modules using Letter-Place and the *differential bar complex* of [9]:



where the number of triple overlaps is at most 1, i.e.,  $r - t_1 - t_2 \leq 1$ . Here, from [8], we have a resolution

$$\dots \longrightarrow P_k \xrightarrow{d_k} \dots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow K_{\lambda/\mu}$$

modeled on a subquotient of the differential bar complex as follows: consider free bar module  $\text{Bar}(Super(L|\{a, b, c\}), A(Z_{ba}, Z_{cb}, Z_{ca}), \{x, y\})$ , where we denote by  $Super(L|\{a, b, c\})$  the letter-place algebra with the places  $a, b, c$  we have been working with,  $x$  and  $y$  are two separators. The algebra  $A(Z_{ba}, Z_{cb}, Z_{ca})$  is the associative noncommutative algebra generated by the variables  $Z_{ba}, Z_{cb}, Z_{ca}$ , subject to the commutation relations  $Z_{ca}Z_{cb} = Z_{cb}Z_{ca}$  and  $Z_{ca}Z_{ba} = Z_{ba}Z_{ca}$ . The algebra  $A(Z_{ba}, Z_{cb}, Z_{ca})$  acts on the module  $Super(L|\{a, b, c\})$  by letting  $Z_{ba}, Z_{cb}$  and  $Z_{ca}$  act like the polarization operators  $D_{ba}, D_{cb}$  and  $D_{ca}$ .

Let us impose now the relations

$$\begin{aligned}
 Z_{cb}^{(\alpha)} Z_{ba}^{(\beta)} &= \sum_{k=0}^{\alpha} Z_{ba}^{(\beta-\alpha+k)} x Z_{cb}^{(k)} Z_{ca}^{(\alpha-k)} \\
 Z_{ca}x &= xZ_{ca} \\
 Z_{cb}x &= xZ_{cb}
 \end{aligned}$$

The module  $P_k$  is freely spanned by all elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(\pi)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where all the integers  $\alpha_i$  and  $\beta_j$  are positive,  $\beta_1 \geq t_2 + 1$  and  $\alpha_1 > t_1 + \sum_j \beta_j$ ,  $\pi = p + \sum_i \alpha_i$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 q + \sum_j \beta_j - \sum_i \alpha_i$ ,  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \sum_j \beta_j$  and  $\lambda + \mu = k$ .

The boundary operator is  $\partial_x + \partial_y$ , given by place polarization by taking away the separators. Let us do an example to describe how this boundary operator works:

$$\begin{aligned} & d_4 \left( Z_{cb}^{(\beta_1)} y Z_{cb}^{(\beta_2)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x Z_{ba}^{(\alpha_2)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1+\alpha_2)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) \right) = \\ & B_{\alpha_2+\sigma_1} Z_{cb}^{(\beta_1)} y Z_{cb}^{(\beta_2)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1)} & b^{(\alpha_2+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) - \\ & B_{\alpha_1+\alpha_2} Z_{cb}^{(\beta_1)} y Z_{cb}^{(\beta_2)} y Z_{ba}^{(\alpha_1+\alpha_2)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1+\alpha_2)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) + \\ & \sum_{k=0}^{\beta_2} \sum_{j=0}^k B_{\beta_2-k}^{\beta_2-j} B_{\rho_1}^{\rho_1+\beta_2-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+j} Z_{cb}^{(\beta_1)} y Z_{ba}^{(\alpha_1-\beta_2+k)} x Z_{ba}^{(\alpha_2)} x \\ & \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1+\alpha_2-\beta_2+k)} & b^{(\sigma_1-k+j)} & c^{(\rho_1+\beta_2-j)} \\ W' & b^{(\sigma_2-j)} & c^{(\rho_2+j)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) - \\ & B_{\beta_1}^{\beta_1+\beta_2} Z_{cb}^{(\beta_1+\beta_2)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x Z_{ba}^{(\alpha_2)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1+\alpha_2)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right). \end{aligned}$$

### 3 Completeness conditions

The main tool in [14, 15] is the division of the canonical basis of bistandard bitableaux of each module  $P_i$  in the complex in two complementary subsets, the “essential elements” and the “non-essential elements”, so that  $P_i = E_{i-1} \oplus N_i$ ,  $P_i \supset E_{i-1} = \text{span}(\text{essential elements})$ ,  $P_i \supset N_i = \text{span}(\text{non-essential elements})$  in  $P_i$ . the essential elements are those which

- Have at least one  $Z_{ba}^{(\cdot)}$  variable in front, and no  $b$  in the first row.
- Have only  $Z_{cb}^{(\cdot)}$  variables in front, no  $c$  in the first row, and  $\sigma \leq t_1$ .

And  $\mathcal{N}_i$  is the complement of the  $\mathcal{E}_{i-1}$  in the canonical basis of  $P_i$ , that is, non-essential elements are those which

- Have at least one  $Z_{ba}^{(\cdot)}$  variable, and  $b$  appears in the first row.
- Have only  $Z_{cb}^{(\cdot)}$  variables, and either  $c$  appears in the first row, or  $\sigma \geq t_1$ .

For example in the first level a basis for  $P_1$  is given by bistandard bitableaux of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where  $\alpha > t_1$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 = q - \alpha$  and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$ , and

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where  $\beta \geq t_2 + 1$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 = q + \beta$  and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$ .

The essential elements  $\mathcal{E}_0$  are the elements of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\alpha)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\alpha)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where  $\alpha \geq t_1 + 1$  and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$ , plus elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma+\beta)} \\ W' & b^{(q-\sigma)} & c^{(\rho_1)} \\ W'' & c^{(\rho_2)} & \end{array} \right),$$

where  $\beta \geq t_2 + 1$ ,  $q - p \leq \sigma \leq t_1$  and  $\rho_1 + \rho_2 = r - \beta$ .

And the non-essential elements  $\mathcal{N}_1$  are given by the complement of  $\mathcal{E}_0$ .

This partition satisfies the following:

- **Weak Completeness Condition:** [14]: Given a non-essential basis element  $T_\alpha \in \mathcal{N}_{i+1}$ , there exists an explicit  $M_\alpha \in E_i$  such that  $d_{i+1}(T_\alpha) = d_{i+1}(M_\alpha)$ .

•**Strong Completeness Condition** [15]: Given a non-essential basis element  $T_\alpha \in \mathcal{N}_{i+1}$ , there exists an explicit  $C_\alpha \in E_{i+1}$  such that  $d_{i+2}(C_\alpha) = T_\alpha - M'_\alpha$ , where  $M'_\alpha \in E_i$ .

Let us remark that the word “explicit” is an essential part of both theorems.

Note that assuming  $d^2 = 0$  the Strong Completeness Condition implies the Weak Completeness Condition. The terms  $M_\alpha$  and  $M'_\alpha$  are called the *essential correcting terms*, and the main Theorem states that they are equal and its consequences. Many computations in this theory are done modulo essential correcting terms (e.g. the main construction of [15])

The Weak Completeness Theorem (i.e. showing that the Weak Completeness Condition hold for the resolution at hand) is used in constructing a basis for the syzygies by setting  $z_\alpha = d_{i+1}(\epsilon_\alpha)$ ; the set of  $z_\alpha \in P_i$  where  $\epsilon_\alpha$  ranges in the essential basis elements of  $P_{i+1}$  forms a basis for the syzygies ([14]).

The Strong Completeness Theorem is then used for the construction of the homotopy: define  $s_{i+1} : P_{i+1} \rightarrow P_{i+2}$  by  $s_{i+1}(T_\alpha) = 0$  if  $T_\alpha$  is essential; if  $T_\alpha$  is non-essential then  $s_{i+1}(T_\alpha) = C_\alpha$  where  $C_\alpha$  is as in the Strong Completeness Condition above. The proof that  $s_i$  forms a splitting contracting homotopy reduces to showing that  $s_i d_{i+1}(\epsilon) = \epsilon$  for essential elements  $\epsilon$ , which follows from lemma 1 of [15], and the non-essential case then follows from the fact that  $d^2 = 0$  and the construction.

Let's do an example to illustrate how the Weak and Strong Completeness Condition works in practice:

*Example.* Given the following non-essential basis element

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where  $\sigma_1 > t_1$ ,  $\beta \geq t_2 + 1$ ,  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$  and  $\rho_1 \geq 0$ , we have that

$$\begin{aligned} & d_1 \left( Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) \right) = \\ & d_1 \left( \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\beta+\rho_1-i} B_i^{\rho_2+i} Z_{ba}^{(\sigma_1+i)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\sigma_1+i)} & b^{(\sigma_1+i)} & c^{(\beta+\rho_1-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) \right) = \\ & \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\beta+\rho_1-i} B_i^{\rho_2+i} \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+i)} & c^{(\beta+\rho_1-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right). \end{aligned}$$

Note that two different elements give the same element under the boundary map. Sometimes we can get an element either by taking away exponentials

from  $b$ 's and putting it in  $c$ 's or taking away exponential from  $a$ 's and putting it in  $b$ 's. The "principle of parsimony" states that we should try to get a given element with the least amount of work possible; thus in this case the essential elements are chosen as the ones that take exponential from  $a$  and put it into  $b$ ; that is for this kind of bitableaux the essential elements are the ones of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\alpha)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\alpha)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where  $\alpha \geq t_1 + 1$  and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$ . Then the example just provided shows that the elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where  $\sigma_1 > t_1$ ,  $\beta \geq t_2 + 1$ ,  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$  and  $\rho_1 \geq 0$ , are "redundant" for the boundary map, that is, non-essential. In this case,

$$M_\alpha = \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\rho_1+\beta-i} B_{\rho_2}^{\rho_2+i} Z_{ba}^{(\sigma_1+i)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+i)} & c^{(\rho_1+\beta-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

Let us use the same kind of bitableaux to illustrate the Strong Completeness Condition. For that non-essential element we also have that

$$\begin{aligned} d_2 \left( Z_{cb}^{(\beta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+\beta)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) \right) = \\ Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) - \\ \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\rho_1+\beta-i} B_{\rho_2}^{\rho_2+i} Z_{ba}^{(\sigma_1+i)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+i)} & c^{(\rho_1+\beta-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right). \end{aligned}$$

The previous equation is taking this game one step further, that is the non-essential element of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where  $\sigma_1 > t_1$ ,  $\beta \geq t_2 + 1$ ,  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$  and  $\rho_1 \geq 0$ , can be reached by the boundary map applied to an essential level one level higher modulo essential element. In this case,

$$M'_\alpha = \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\rho_1+\beta-i} B_{\rho_2}^{\rho_2+i} Z_{ba}^{(\sigma_1+i)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+i)} & c^{(\rho_1+\beta-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

Note that in this easy example there is nothing to prove, that is,  $M_\alpha = M'_\alpha$  directly. In the general case they look quite different but Theorem 1 shows their equality.

## 4 Combinatorial equivalence of completeness conditions

Let us recall the completeness conditions of the previous section:

•**Weak Completeness Condition:** Given a non-essential basis element  $T_\alpha \in \mathcal{N}_{i+1}$ , there exists an explicit  $M_\alpha \in E_i$  such that  $d_{i+1}(T_\alpha) = d_{i+1}(M_\alpha)$ .

•**Strong Completeness Condition:** Given a non-essential basis element  $T_\alpha \in \mathcal{N}_{i+1}$ , there exists an explicit  $C \in E_{i+1}$  such that  $d_{i+2}(C) = T_\alpha - M'_\alpha$ , where  $M'_\alpha \in E_i$ .

We have the following theorem, that relates the Weak and Strong Completeness Conditions in a combinatorial way.

**Theorem 1.** *For all  $\alpha$  parametrizing non-essential elements  $T_\alpha$ , the linear combination of essential elements  $M_\alpha$  of the Weak Completeness Condition is equal to the linear combination of essential elements  $M'_\alpha$  of the Strong Completeness Condition.*

Before we prove this theorem, let us notice the following

**Corollary.** *The Buchsbaum-Rota sequence satisfies  $d^2 = 0$ .*

Let us show the corollary: we call it a corollary because Theorem 1 is the last step in a series of *purely computational facts* that imply that  $d^2 = 0$  and then that the Buchsbaum-Rota sequence is a resolution. The merit of this way of arriving at this is that both the completeness condition plus Theorem 1 rely purely on elementary combinatorial computations instead of, for example, the homological considerations of the fundamental exact sequence of [9].

Let us show how the corollary follows from these results:

1. The Weak Completeness Condition implies that it suffices to show that  $d^2 = 0$  for essential basis elements.
2.  $d^2 = 0$  for linear combinations of essential elements that are in the image of the homotopy  $s_{i+1} : P_{i+1} \rightarrow P_{i+2}$ : indeed, the image of  $s_{i+1}$  is spanned by  $\epsilon_\alpha = s_{i+1}(T_\alpha)$ ,  $T_\alpha \in P_{i+1}$  non-essential basis element. But  $d_{i+2}(\epsilon_\alpha) = T_\alpha - M'_\alpha$  as above. Then theorem 1 says that  $d_{i+2}(\epsilon_\alpha) = T_\alpha - M_\alpha$  where  $M_\alpha$  is of the Weak Completeness Condition, which satisfies  $d_{i+1}(T_\alpha) = d_{i+1}(M_\alpha)$ . Therefore for such elements  $d^2 = 0$ .
3. The homotopy condition applied to essential elements reads  $s_i d_{i+1}(\epsilon) = \epsilon$  when  $\epsilon \in E_i$ . This is shown in [15] without assuming  $d^2 = 0$  (but  $d^2 = 0$  is needed to show the homotopy condition  $sd + ds = 1$  for non-essential elements). This implies that the image of  $s_i$  spans the essential space  $E_i$ .

□

*Proof of Theorem 1*

We will do the prove in a pedagogical sequence, first we will show that  $M_\alpha = M'_\alpha$  (corresponding to the non-essential element  $T_\alpha$ ) for the level one and then for the general level.

**Level one.** In this level we will have three cases, corresponding to the different ways in which an element can be non-essential.

**Case 1.** For non-essential elements of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\alpha-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where  $\alpha > t_1$ ,  $\sigma_1 > 0$  and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$ , the corresponding

$$M_\alpha = M'_\alpha = B_\alpha^{\alpha+\sigma_1} Z_{ba}^{(\alpha+\sigma_1)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\alpha-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right).$$

**Case 2.** For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where  $\sigma_1 > t_1$ ,  $\beta \geq t_2 + 1$ ,  $\rho_1 \geq 0$  and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$ , the corresponding

$$M_\alpha = \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_2}^{\beta-i+\rho_2} B_i^{i+\rho_1} Z_{ba}^{(\sigma_1+\beta-i)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+\beta-i)} & c^{(\rho_1+i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\beta+i)} & c^{(\beta-i+\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

and the corresponding

$$M'_\alpha = \sum_{j=0}^{\beta} B_{\beta-j}^{\rho_1+\beta-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+j} Z_{ba}^{(\sigma_1+j)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+j)} & c^{(\rho_1+\beta-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-j)} & c^{(\rho_2+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

If we put  $k = \beta - j$  in  $M'_\alpha$  we get that  $M'_\alpha = M_\alpha$ .

**Case 3.** For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where  $q - p \leq \sigma_1 \leq t_1$ ,  $\beta \geq t_2 + 1$ ,  $\rho_1 > 0$  and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$ . This case splits in two different cases: if we set  $\sigma t_1 - \sigma_1 - 1$ ,

**3.1)** If  $\rho_1 > \sigma + 1$  then the corresponding

$$\begin{aligned} M'_\alpha &= \sum_{k=0}^{\sigma+1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-k)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{\rho_1-\sigma-1} \sum_{n=0}^{\beta} (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta-n}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-n-l} B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{n} \\ &\quad Z_{ba}^{(t_1+l+n)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+t_1+l+n)} & c^{(\beta+\rho_1-\sigma-1-n-l)} \\ W' & b^{(q-t_1-n)} & c^{(\rho_2+\sigma+1+n+l)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) = B - D, \end{aligned}$$

and the corresponding

$$M_\alpha = \sum_{i=0}^{\sigma+1} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\rho_1-i}^{\beta+\rho_1-i} Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-i)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\beta+\rho_1-i} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\rho_1-i}^{\beta+\rho_1-i} B_{\rho_2+i}^{\beta+\rho_1+\rho_2-j} \\
 & Z_{ba}^{(\sigma_1+\beta+\rho_1-j)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+\beta+\rho_1-j)} & c^{(j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\beta-\rho_1+j)} & c^{(\beta+\rho_1+\rho_2-j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Now, let  $M_\alpha = A_1 + A_2$  where

$$A_1 = \sum_{i=0}^{\sigma+1} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\rho_1-i}^{\beta+\rho_1-i} Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-i)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

and

$$\begin{aligned}
 & A_2 = \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\beta+\rho_1-i} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\rho_1-i}^{\beta+\rho_1-i} B_{\rho_2+i}^{\beta+\rho_1+\rho_2-j} \\
 & Z_{ba}^{(\sigma_1+\beta+\rho_1-j)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+\beta+\rho_1-j)} & c^{(j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\beta-\rho_1+j)} & c^{(\beta+\rho_1+\rho_2-j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

CLAIM: the following combinatorial identities hold

- 1)  $B = A_1$
- 2)  $-D = A_2$

The first identity is clear, we only need to show the second one. In order to prove the second identity we have to consider two cases.

**3.1.1)** If in the expression for  $D$  we take  $n+l = t$ , where  $1 \leq t \leq \rho_1 - \sigma - 1$ , then

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{\sigma+1} \sum_{l=1}^t B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{\rho_2+\sigma+1+n+l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta-n}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-n-l} = \\
 & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{l=1}^t B_{\sigma+1+l}^{\sigma+1+t} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta-n}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-t} = X
 \end{aligned}$$

If we put  $p = n$ ,  $m = \beta$  and  $q = \beta + \rho_1 - \sigma - 1 - t + n$  in the following formula

$$B_{m-p}^{q-p} = \sum_{i=0}^p (-1)^i B_m^{q-i} B_i^p,$$

we get that

$$B_{\beta-n}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-t} = \sum_{i=0}^n (-1)^i B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-t+n-i} B_i^n.$$

So

$$X = (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{l=1}^t \sum_{i=0}^{t-l} (-1)^i B_{t-l}^{\sigma+1+t} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_i^{t-l} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-l-i}$$

Let  $l+i=z$ , where  $1 \leq z \leq t$

$$\begin{aligned} X &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t \sum_{l=1}^z (-1)^{z-l} B_{t-l}^{\sigma+1+t} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{t-z}^{t-l} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} = \\ &(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^z \sum_{l=1}^z (-1)^l B_{t-z}^{\sigma+1+t} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{z-l}^{\sigma+1+z} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} = \\ &(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^z B_{t-z}^{\sigma+1+t} \left[ \sum_{l=1}^z (-1)^l B_{z-l}^{\sigma+1+z} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} \right] B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} \end{aligned}$$

Set  $v=l-1$ , then

$$\begin{aligned} &(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^{z+1} B_{t-z}^{\sigma+1+t} \left[ \sum_{v=0}^{z-1} (-1)^v B_{z-1-v}^{\sigma+1+z} B_{\sigma+1}^{\sigma+v+1} \right] B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} \\ &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^{z+1} B_{t-z}^{\sigma+1+t} B_{z-1}^{z-1} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} \\ &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^{z+1} B_{t-z}^{\sigma+1+t} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} \end{aligned}$$

Now, if in the expression for  $A_2$  we let  $j = \beta + \rho_1 - \sigma - 1 - t$  then we get

$$\sum_{i=\sigma+2}^{\sigma+t+1} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} B_i^{\sigma+1+t} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-i}.$$

Set  $p = i - \sigma - 1$

$$(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{p=1}^t (-1)^p B_{p+\sigma+1}^{\sigma+1+t} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z}.$$

**3.1.2)** If in the expression for  $D$  we take  $n+l = t$ , where  $\rho_1 - \sigma \leq t \leq \beta + \rho_1 - \sigma - 1$  then  $t = \rho_1 - \sigma + \alpha$ , where  $0 \leq \alpha \leq \beta - 1$ . Thus  $l + n = \rho_1 - \sigma + \alpha$  and

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} B_{\rho_1+\alpha+1-n}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1+\alpha-n} B_{\beta-n}^{\beta-1-\alpha} = \\ & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} B_n^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1+\alpha-n} B_{\beta-n}^{\beta-1-\alpha}. \end{aligned}$$

Set  $i = n - \alpha - 1$

$$(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{i=0}^{\beta-\alpha-1} B_{i+\alpha+1}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1-1-i} B_i^{\beta-1-\alpha}.$$

Now, if in the expression for  $A_2$  we let  $j = \beta + \rho_1 - \sigma - 1 - t = \beta - 1 - \alpha$  we get

$$\begin{aligned} & B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} (-1)^i B_i^{\rho_1+\alpha+1} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-i} = \\ & B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} (-1)^i B_i^{\rho_1+\alpha+1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1-i} B_k^{\beta-\alpha-1} = \\ & B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1} \left[ \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} (-1)^i B_{\rho_1+\alpha+1-i-\beta+k}^{\rho_1+\alpha+1-\beta+k} \right] B_k^{\beta-\alpha-1} = \\ & B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1} \left[ \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} (-1)^i B_i^{\rho_1+\alpha+1-\beta+k} \right] B_k^{\beta-\alpha-1} = \\ & -B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1} \left[ \sum_{i=0}^{\sigma+1} (-1)^i B_i^{\rho_1+\alpha+1-\beta+k} \right] B_k^{\beta-\alpha-1} = \\ & -(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1+\alpha-\beta+k} B_k^{\beta-\alpha-1} = Y \end{aligned}$$

If we set  $p = \beta - \alpha - 1 - k$  in  $Y$  we get

$$-(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{p=0}^{\beta-\alpha-1} B_{p+\alpha+1}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1-1-p} B_p^{\beta-\alpha-1}.$$

**3.2)** If  $\rho_1 \leq \sigma + 1$  then the corresponding

$$M'_\alpha = - \sum_{k=0}^{\rho_1-1} \sum_{j=0}^{\rho_1-k} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_2+k}^{\rho_2+k+j} Z_{cb}^{(\beta)} y$$

$$\left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+k+j)} & c^{(\rho_1-k-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k-j)} & c^{(\rho_2+k+j)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) + \sum_{k=0}^{\rho_1-1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-k}$$

$$Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-k)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) = -A + B$$

where in the first term  $k + j \geq 1$ , and the corresponding

$$M_\alpha = \sum_{i=0}^{\rho_1} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-i} Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-i)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

To prove that  $M'_\alpha = M_\alpha$  we note that:

-If in the expression for  $A$  we take  $k + j = t$ , where  $0 < t \leq \rho_1 - 1$  then

$$\sum_{k=0}^t B_{\rho_2+k}^{\rho_2+t} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} = B_{\rho_2}^{\rho_2+t} \sum_{k=0}^t (-1)^k B_k^t,$$

which is equal to 0 if  $t$  is different to 0.

-If in the expression for  $A$  we take  $k + j = \rho_1$  then

$$\sum_{k=0}^{\rho_1-1} (-1)^k B_{\rho_2+k}^{\rho_2+\rho_1} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} = B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1} \sum_{k=0}^{\rho_1-1} (-1)^k B_k^{\rho_1} - (-1)^{\rho_1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1}.$$

**General level.** Let us prove the equality in general now. We will have four cases corresponding to the different ways in which an element can be non-essential.

**Case 1.** For non-essential elements of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_i)} x \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+|\alpha|)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-|\alpha|-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where  $\alpha_1 > t_1$ ,  $\alpha_j > 0$  for  $j = 2, \dots, i$ ,  $\sigma_1 > 0$  and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$ , the corresponding

$$M_\alpha = M'_\alpha = B_{\alpha_i}^{\alpha_i + \sigma_1} Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_i + \sigma_1)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-|\alpha|-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) +$$

$$\sum_{m=i-1}^1 (-1)^{i-m} B_{\alpha_m}^{\alpha_m + \alpha_{m+1}} Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_{m-1})} x Z_{ba}^{(\alpha_m + \alpha_{m+1})} x Z_{ba}^{(\alpha_{m+2})} x \dots x$$

$$Z_{ba}^{(\alpha_i)} x Z_{ba}^{(\sigma_1)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-|\alpha|-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

**Case 2.** For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|)} & b^{(\rho)} \quad c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where  $\rho > 0$ ,  $\lambda - \mu = i$ ,  $\beta_1 \geq t_2 + 1$  and  $\beta_j > 0$  for  $j = 2, \dots, \lambda$ ,  $\alpha_1 > t_1 + |\beta|$  and  $\alpha_j > 0$  for  $j = 2, \dots, \mu$ ,  $|\beta| = \sum \beta_j$ ,  $|\alpha| = \sum \alpha_j$ , and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - |\beta|$ , the corresponding

$$M_\alpha = M'_\alpha = Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x$$

$$\left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|)} & b^{(\rho)} \quad c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + B_{\alpha_\mu}^{\alpha_\mu + \rho} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x$$

$$Z_{ba}^{(\alpha_{\mu-1})} x Z_{ba}^{(\alpha_\mu + \rho)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\rho)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) +$$

$$\sum_{k=\mu-1}^1 (-1)^{\mu-k} B_{\alpha_k}^{\alpha_k + \alpha_{k+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_k + \alpha_{k+1})} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x Z_{ba}^{(\rho)} x$$

$$\left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\rho)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=\lambda-1}^1 (-1)^{\mu+\lambda-l} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_l+\beta_{l+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x Z_{ba}^{(\rho)} x \\
& \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\rho)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + \\
& (-1)^\mu \sum_{k_1=0}^{\beta_\lambda} \sum_{i=2}^{\mu} \sum_{k_i=0}^{k_{i-1}} \sum_{m=0}^{k_\mu} M_{\lambda,\mu,k} B_{\rho_1}^{\beta_\lambda+\rho_1-k_\mu} B_{k_\mu-m}^{\beta_\lambda+\rho_1-m} B_{\rho_2}^{\rho_2+m} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{\lambda-1})} y Z_{ba}^{(\alpha_1-\beta_\lambda+k_1)} x Z_{ba}^{(\alpha_2-k_1+k_2)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu-k_{\mu-1}+k_\mu)} x Z_{ba}^{(\rho-k_\mu+m)} x \\
& \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|-\beta_\lambda+\rho+m)} & c^{(\beta_\lambda+\rho_1-m)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho-m)} & c^{(\rho_2+m)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),
\end{aligned}$$

where

$$M_{\lambda,\mu,k} = B_{\beta_\lambda-k_1, k_1-k_2, \dots, k_{\mu-1}-k_\mu}^{\beta_\lambda-k_\mu} = \frac{(\beta_\lambda - k_\mu)!}{(\beta_\lambda - k_1)!(k_1 - k_2)! \dots (k_{\mu-1} - k_\mu)!}$$

is the monomial coefficient.

**Case 3.** For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where  $\sigma_1 > t_1$ ,  $\beta_1 \geq t_2 + 1$ ,  $\beta_j > 0$  for  $j = 2, \dots, i$ ,  $t_1 = \sigma_1 + 1 + \sigma$  and  $\rho_1 \geq 0$ , the corresponding

$$\begin{aligned}
M_\alpha = M'_\alpha &= \sum_{j=0}^{\beta_i} B_{\rho_1}^{\beta_i+\rho_1-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+j} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|-\beta_i+j)} x \\
& \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|-\beta_i+j)} & c^{(\beta_i+\rho_1-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-j)} & c^{(\rho_2+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + \sum_{l=i-1}^1 (-1)^{i-l} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_l+\beta_{l+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).
\end{aligned}$$

**Case 4.** For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where  $q - p \leq \sigma_1 \leq t_1$ ,  $\rho_1 > 0$ ,  $\beta_1 \geq t_2 + 1$ ,  $\beta_j > 0$  for  $j = 2, \dots, i$ , and  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - |\beta|$ . Here we have to consider two cases: if we set  $\sigma = t_1 - \sigma_1 - 1$ ,

**4.1)** If  $\rho_1 > \sigma + 1$  then the corresponding

$$\begin{aligned} M'_\alpha &= \sum_{k=0}^{\sigma+1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y \\ &\left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + \sum_{k=0}^{\sigma+1} \sum_{m=i-1}^1 (-1)^{k+i-m} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} \\ &Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-k)} y \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) \\ &- \sum_{l=1}^{\rho_1-\sigma-1} \sum_{n=0}^{\beta_i} (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{\rho_2+\sigma+1+l+n} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta_i-n}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-n-l} \\ &Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{ba}^{(t_1+|\beta|-\beta_i+l+n)} x \\ &\left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+t_1+|\beta|-\beta_i+l+n)} & c^{(\beta_i+\rho_1-\sigma-1-n-l)} \\ W' & b^{(q-t_1-l-n)} & c^{(\rho_2+\sigma+1+l+n)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) - \sum_{l=1}^{\rho_1-\sigma-1} \sum_{m=i-1}^1 (-1)^{\sigma+1+i-m} \\ &B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(t_1+|\beta|+l)} x \\ &\left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+t_1+|\beta|+l)} & c^{(\rho_1-\sigma-1-l)} \\ W' & b^{(q-t_1-l)} & c^{(\rho_2+\sigma+1+l)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) = B + C - E - F \end{aligned}$$

and the corresponding

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \sum_{k=0}^{\sigma+1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y \\ &\left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) - \sum_{k=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{\beta_i+\rho_1-k}^{\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-2})} y Z_{cb}^{(\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-k)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) - (-1)^{\rho_1} B_{\rho_1}^{\rho_2+\rho_1} B_{\beta_i}^{\beta_{i-1}+\beta_i} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-2})} y Z_{cb}^{(\beta_{i-1}+\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\rho_1)} c^{(\rho_2+\rho_1)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) \\
& + \sum_{k=\sigma+2}^{\rho_1-1} \sum_{l=i-2}^1 (-1)^{k+i-l} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i+\beta_{i+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{l=i-2}^1 (-1)^{\rho_1+i-l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i+\beta_{i+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\rho_1)} c^{(\rho_2+\rho_1)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{k=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\beta_i+\rho_1-k} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} B_{\rho_2+k}^{\rho_2+k+j} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|-\beta_i+k+j)} x \\
& \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|-\beta_i+k+j)} & c^{(\beta_i+\rho_1-k-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k-j)} & c^{(\rho_2+k+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=0}^{\sigma+1} (-1)^{i-1-m+\delta} \\
& B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y \\
& \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)} & c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + \sum_{m=1}^{i-2} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^{i-1-m+\delta} \\
& B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\rho_2}^{\rho_2+\delta} B_{\rho_1-\delta}^{\beta_i+\rho_1-\delta} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)} c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^\delta B_{\beta_i}^{\beta_{i-1}+\beta_i} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\rho_1-\delta}^{\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-\delta} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-2})} y Z_{cb}^{(\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} \sum_{l=i-1}^{m+2} (-1)^{\delta-1-m-l} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} \\
& B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} Z_{cb}^{(\beta_l)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_l+\beta_{l+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{m=1}^{i-2} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^{\delta-1-m-(m+3)} \\
& B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\beta_m+\beta_{m+1}}^{\beta_m+\beta_{m+1}+\beta_{m+2}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1}+\beta_{m+2})} y \dots y \\
& Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \\
& \sum_{m=2}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^{\delta-1-m-(m+4)} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\beta_m+\beta_{m+1}}^{\beta_{m-1}+\beta_m+\beta_{m+1}} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{m-1}+\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} \sum_{l=m-2}^1 (-1)^{\delta-1-m-l} \\
& B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_l+\beta_{l+1})} y \dots y \\
& Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \left( \begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) \\
& - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} \sum_{j=0}^{\rho_1-\delta} (-1)^{i-1-m+\delta} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\rho_2+\delta}^{\rho_2+\delta+j} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} \\
& y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\delta+j)} x \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\delta+j)} & c^{(\rho_1-\delta-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta-j)} & c^{(\rho_2+\delta+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) =
\end{aligned}$$

$$A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + A_5 + A_6 - A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12} - A_{13} - A_{14}$$

**Claim:**

$$\begin{array}{lll}
1) B = A_1 & 4) -F = -A_{14} - A_3 + A_5 & 7) -A_2 + A_9 = 0 \\
2) C = -A_7 & 5) A_{10} - A_{13} = 0 & 8) A_4 + A_8 = 0 \\
3) -E = A_6 & 6) A_{11} + A_{12} = 0 &
\end{array}$$

Proof of the claim: The identities 1), 2), 5) and 8) are clear.

4)

$$\begin{aligned}
-A_{14} - A_3 + A_5 &= - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\rho_1-\delta} (-1)^{i-1-m+\delta} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\rho_2}^{\rho_2+\delta} B_{\rho_2+\delta}^{\rho_2+\delta+j} \\
&\quad Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\delta+j)} x \\
&\quad \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\delta+j)} & c^{(\rho_1-\delta-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta-j)} & c^{(\rho_2+\delta+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).
\end{aligned}$$

We know that  $1 \leq l \leq \rho_1 - \sigma - 1$  and  $\sigma + 2 \leq \delta + j \leq \rho_1$ . So we let  $\delta + j = \sigma + 1 + l$  or  $\delta = \sigma + 1 + l - j$ . Thus

$$- \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{i-1-m+\sigma+1+l-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\delta} = - \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{i-m+\sigma+l-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l}$$

$$B_j^{\sigma+1+l} = -(-1)^{i-m+\sigma+l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j B_j^{\sigma+1+l} = -(-1)^{i-m+\sigma+l}$$

$$B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} (-1)^{l-1} B_{l-1}^{\sigma+l} = -(-1)^{i-m+\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{l-1}^{\sigma+l}$$

6)  $A_{11} + A_{12} = 0$  because we have

$$B_{\beta_m+\beta_{m+1}}^{\beta_m+\beta_{m+1}+\beta_{m+2}} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} = B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}+\beta_{m+2}} B_{\beta_{m+1}}^{\beta_{m+1}+\beta_{m+2}}$$

in  $A_{11}$  where  $1 \leq m \leq i - 2$  and

$$B_{\beta_{m-1}}^{\beta_{m-1}+\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}}$$

in  $A_{12}$  where  $2 \leq m \leq i - 1$ .

7)  $-A_2 + A_9 = 0$  because

$$B_{\beta_{i-1}+\beta_i}^{\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-\delta} B_{\beta_{i-1}}^{\beta_{i-1}+\beta_i} = B_{\beta_{i-1}}^{\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-\delta} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\delta}$$

In order to prove the identity (3) we have to consider two cases depending of  $\rho_1$ . Recall that  $\rho_1 > \sigma + 1$ .

Case 1. If in the expression for  $E$  we take  $n+l = t$ , where  $1 \leq t \leq \rho_1 - \sigma - 1$ , then from (3.1.1) we have that

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{\sigma+1} \sum_{l=1}^t B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{\rho_2+\sigma+1+n+l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta_i-n}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-n-l} = \\
 & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^{z+1} B_{t-z}^{\sigma+1+t} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-z}
 \end{aligned}$$

On the other hand, let  $u = k - \sigma - 1$  then

$$\begin{aligned}
 A_6 = & \sum_{u=1}^{\rho_1-\sigma-1} \sum_{j=0}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u} (-1)^{u+\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+u} B_{\rho_2+\sigma+1+u}^{\rho_2+\sigma+1+u+j} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u} \\
 & Z_{cb}^{(\beta)} y \dots Z_{cb}^{(\beta_i-1)} y Z_{ba}^{(t_1+|\beta|-\beta_i+u+j)} x \\
 & \left( \begin{array}{c|cc} W & a^{(p+t_1+|\beta|-\beta_i+u+j)} & c^{(\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u-j)} \\ W' & b^{(q-t_1-u-j)} & c^{(\rho_2+\sigma+1+u+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Now, we let  $u + j = t$ , where  $1 \leq t \leq \rho_1 - \sigma - 1$ , then

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{\sigma+1} \sum_{u=1}^t (-1)^u B_{\rho_2+\sigma+1+u}^{\rho_2+\sigma+1+t} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+u} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u} = \\
 & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{u=1}^t (-1)^u B_{t-u}^{\sigma+1+t} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u}
 \end{aligned}$$

Case 2. If in the expression for  $E$  we take  $n + l = t$ , where  $\rho_1 - \sigma \leq t \leq \beta_i + \rho_1 - \sigma - 1$  then  $t = \rho_1 - \sigma + \alpha$ , where  $0 \leq \alpha \leq \beta_i - 1$ . Thus  $n + l = \rho_1 - \sigma + \alpha$  and

$$(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1+1+\alpha} \sum_{n=\alpha+1}^{\beta_i} B_n^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1+\alpha-n} B_{\beta_i-n}^{\beta_i-1-\alpha}$$

Set  $j = n - \alpha - 1$

$$(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1+1+\alpha} \sum_{j=0}^{\beta_i-\alpha-1} B_{j+\alpha+1}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1-1-j} B_{\beta_i-\alpha-1-j}^{\beta_i-1-\alpha}$$

Now, if in  $A_6$  we let  $k + j = \sigma + 1 + t = \rho_1 + \alpha + 1$  we get

$$B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1+\alpha+1} \sum_{k=\sigma+2}^{\rho_1} (-1)^k B_k^{\rho_1+\alpha+1} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-k} =$$

$$-(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1+\alpha+1} \sum_{j=0}^{\beta_i-\alpha-1} B_{j+\alpha+1}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1-1-j} B_k^{\beta_i-\alpha-1}.$$

4.2) If  $\rho_1 \leq \sigma + 1$  then the corresponding

$$M'_\alpha = - \sum_{k=0}^{\rho_1-1} \sum_{j=0}^{\rho_1-k} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_2+k}^{\rho_2+k+j} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y$$

$$\left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+k+j)} & c^{(\rho_1-k-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k-j)} & c^{(\rho_2+k+j)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) + \sum_{k=0}^{\rho_1-1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-k}$$

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) +$$

$$\sum_{k=0}^{\rho_1-1} \sum_{m=i-1}^1 (-1)^{k+i-m} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{m-1})} y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y Z_{cb}^{(\beta_{m+2})}$$

$$y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-k)} y \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right)$$

where in the first double sum  $k + j \geq 1$ , and the corresponding

$$M_\alpha = \sum_{k=0}^{\rho_1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y$$

$$\left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=0}^{\rho_1-1} (-1)^{i-1-m+\delta} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_\delta^{\rho_2+\delta}$$

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y \left( \begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)} & c^{(\rho_2+\delta)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right)$$

The proof is exactly the same as in (3.2), and this finishes the proof of theorem 1.  $\square$

## 5 Concluding remarks

The series of papers [14, 15] and the present one provides a proposal to understand the Buchsbaum-Rota resolutions of Weyl modules: first, partition de Letter-Place basis of each module into “essential” and “non-essential” elements satisfying the weak completeness condition. This produces, in particular, a basis of the syzygies. Then give a strong form of the completeness condition: this provides a splitting homotopy. Finally, relating the weak and strong completeness conditions provides an “elementary” (i.e. completely combinatorial) understanding of the resolutions.

The author hopes that this strategy can be applied to the other types of shapes (e.g. the shapes considered in [9]). Of course, the hurdles imposed by the computational complexity are enormous, but they can be mitigated by using symbolic computation packages.

Also, it would be interesting to give combinatorial interpretations of the kind of computations given in these papers.

## References

- [1] K. Akin, D. Buchsbaum and J. Weyman, *Schur Functors and Schur Complexes* Adv. Math **44**, No. 3 (1982) 207-278.
- [2] G. Boffi and R. Sánchez, *On the resolutions of the powers of the Pfaffian ideal*. J. Algebra **152** (1992), no. 2, 463–491.
- [3] D. Buchsbaum, *Resolutions and representations of  $GL(n)$* , Adv. Studies Pure Math., Commutative Algebra Combinatorics **11**, 21-28.
- [4] D. Buchsbaum, *On commutative algebra and characteristic-free representation theory*, J. Pure and applied Algebra **152** (2000) 41-48.
- [5] D. Buchsbaum, *A characteristic-free example of a Lascoux resolution, and letter-place methods for intertwining numbers*, Eur. J. Comb. **25**, No.8, 1169-1179 (2004).
- [6] D. Buchsbaum and D. Flores de Chela, *Intertwining numbers; the three-rowed case*. J. Algebra **183** (1996), no. 2, 605–635.
- [7] D. Buchsbaum and G.-C. Rota, *Projective resolutions of Weyl modules*, Proc. Nat. Acad. Sci. **90** (1993), 2448-2450.
- [8] D. Buchsbaum and G.-C. Rota, *A new construction in homological algebra*, Proc. Nat. Acad. Sci. **91** (1994), 4115-4119.

- [9] D. Buchsbaum and G.-C. Rota, *Approaches to resolutions of Weyl modules*, Adv. Applied Math, **27**, No. 1 (2001) 82-191.
- [10] D. Buchsbaum and R. Sánchez, *On lifting maps between Weyl modules: can bad shapes be resolved by better shapes?* Adv. Math. **105** (1994), no. 1, 59–75.
- [11] F.D. Grosshans, G.-C Rota and J. Stein, *Invariant Theory and Superalgebras*, American Mathematical Society, 1987.
- [12] A. Lascoux, *Syzygies des variétés déterminantales*, Adv. Math. **30** (1978) 202-237.
- [13] J. J. Rotman, *An Introduction to homological algebra* Academic Press, New York, 1979.
- [14] M. Sano, *A combinatorial description of the syzygies of certain Weyl modules*, Comm. in Algebra, **31** no. 10, 5115-5167, 2003, errata and addenda, Comm. in Algebra, **32** no. 12, 4835-4838, 2004.
- [15] M. Sano, *Homotopies for the generalized bar complex associated to certain 3-rowed Weyl modules*, Comm. in Algebra, to appear (available at <http://www.ime.unicamp.br/~msano/homotopy.pdf>).

MARI SANO  
IMECC-UNICAMP  
PRAÇA SERGIO BUARQUE DE HOLANDA, 651  
CP 6065, 13083-859, CAMPINAS, SP, BRASIL

# Graphical introduction to classical Lie algebras

Rafael Díaz & Eddy Pariguan

## Abstract

We develop a graphical notation to introduce classical Lie algebras. Although this paper deals with well-known results, our pictorial point of view is slightly different to the traditional one. Our graphical notation is elementary and easy to handle, thus it provides an effective tool for computations with classical Lie algebras. Moreover, it may be regarded as a first and foundational step in the process of uncovering the categorical meaning of Lie algebras.

## 1 Introduction

A first step in the study of an arbitrary category  $\mathcal{C}$  is to define the set  $\mathcal{S}(\mathcal{C})$  of isomorphism classes of *simple* objects in  $\mathcal{C}$ . For example in **Set** the category of sets, the simple objects  $\mathcal{S}(\mathbf{Set})$  are the empty set  $\emptyset$  and  $\{\emptyset\}$ . In **Top** the category of topological spaces, the set  $\mathcal{S}(\mathbf{Top})$  are the homeomorphism classes of connected topological spaces. An object  $y$  of an abelian category  $\mathcal{C}$  is said to be simple if in any exact sequence

$$0 \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow 0,$$

either  $x$  is isomorphic to 0 or  $z$  is isomorphic to 0, see [7]. It is a remarkable fact that non-equivalent categories may very well have equivalent sets of simple objects. Let us introduce a list of categories that at first seem to be utterly unrelated and yet the corresponding sets of simple objects are deeply connected.

We denote by **Group** the category whose objects are groups and whose morphisms are group homomorphisms. We let **LieGroup**, (see Section 2) denote the subcategory of **Group** whose objects are finite dimensional complex Lie groups. Morphism in **LieGroup** are smooth group homomorphisms. We define **FinGroup** to be the full subcategory of **Group** whose objects are finite groups. **WeylGroup** denotes the set of isomorphism classes of Weyl groups, which can be taken to be  $A_n = S_{n+1}$ ,  $B_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ ,  $D_n = \mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n$ , where  $S_n$  is the group of permutations in  $n$  letters, and  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$  are the so called exceptional Weyl groups.

We proceed to introduce the corresponding sets of simple objects.  $S(\mathbf{Group})$  denotes the set of isomorphisms classes of groups having no proper normal subgroups. The classification of finite simple groups is a notoriously difficult problem with a fascinating history. It was established in 1981 that every simple finite group is isomorphic to one of the following list: A cyclic group of prime order. An alternating group  $A_n \subset S_n$  for  $n \geq 5$ . A finite group of Lie type (finite analogues of the classical Lie group). A list of 26 sporadic simple groups. The largest sporadic group is called the Monster and appears naturally as the automorphism group of a vertex algebra.  $S(\mathbf{LieGroup})$  denotes the set of isomorphisms classes of Lie groups which are simple as groups and also are connected and simply connected. Consider the  $\mathbb{C}$ -vector space  $\mathbb{C}^n$ .  $GL_n(\mathbb{C})$  is the group of linear automorphism of  $\mathbb{C}^n$  as is defined by  $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$ . The subgroup  $SL_n(\mathbb{C})$  of  $GL_n(\mathbb{C})$  consists of volume preserving automorphisms of  $\mathbb{C}^n$ ,

$$SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}.$$

The groups  $SO_n(\mathbb{C}) \subset SL_n(\mathbb{C})$  and  $Sp_{2n}(\mathbb{C}) \subset SL_{2n}(\mathbb{C})$  are determined by fixing a symmetric  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  and a skew-symmetric  $\omega$  non-degenerated bilinear form on  $\mathbb{C}^n$ , respectively. Then

$$SO_n(\mathbb{C}) = \{A \in SL_n(\mathbb{C}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ for all } x, y \in \mathbb{C}^n\}$$

and

$$Sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{A \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid \omega(Ax, Ay) = \omega(x, y) \text{ for all } x, y \in \mathbb{C}^n\}.$$

$S(\mathbf{FinGroup})$  denotes the set of isomorphisms classes of finite simple groups.

$\mathbf{LieAlg}$  denotes the category whose objects are finite dimensional complex Lie algebras (see Section 2), morphism are Lie algebra homomorphism.  $S(\mathbf{LieAlg})$  is the set of isomorphisms classes of simple Lie algebras, i.e., Lie algebras having no proper ideals.

$\mathbf{Root}$  denotes the category of root systems. Objects in  $\mathbf{Root}$  are triples  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Phi)$  such that

- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  is an Euclidean space.
- $\Phi \subset V$  is a finite set generating  $V$ .
- If  $\alpha \in \Phi$  then  $-\alpha \in \Phi$ , but  $k\alpha \notin \Phi$  for any real number  $k \neq \pm 1$ . Element of  $\Phi$  are called roots.
- For  $\alpha \in \Phi$  the reflection  $S_\alpha$  in the hyperplane  $\alpha^\perp$  orthogonal to  $\alpha$  given by  $\alpha^\perp = \{x \in V : \langle x, \alpha \rangle = 0\}$  maps  $\Phi$  to itself.
- For  $\alpha, \beta \in \Phi$ ,  $A_{\alpha, \beta} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$ .

A morphism in **Root** from  $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1, \Phi_1)$  to  $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2, \Phi_2)$  is a linear transformations  $T : V_1 \rightarrow V_2$  such that  $\langle T(x), T(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$  for all  $x, y \in V_1$ , and  $T(\Phi_1) \subset \Phi_2$ .

The direct sum of root systems is defined as follows: suppose that  $(V_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_i}, \Phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  are root systems, then the Euclidean space of the direct sum is  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ , with inner product

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_i}.$$

The roots of the direct sum are  $\Phi = \bigsqcup_{i=1}^n \Phi_i$ . The triple  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V, \Phi)$  is a root system.  $S(\mathbf{Root})$  is the set of isomorphisms classes of simple root systems, i.e., root systems which are not isomorphic to the direct sum of two non-vanishing root systems.

**Dynkin** denotes the category of Dynkin diagrams. Objects in **Dynkin** are called Dynkin diagrams and are non-directed graphs  $\Delta$  with the following properties

- The set  $V_\Delta$  of vertices of  $\Delta$  is equal to  $\{1, \dots, n\}$  for some  $n \geq 1$ .
- The number of edges joining two vertices in  $\Delta$  is 0, 1, 2 or 3.
- If vertices  $i$  and  $j$  are joined by 2 or 3 edges, then an arrow is chosen pointing either from  $i$  to  $j$ , or from  $j$  to  $i$ .
- The quadratic form

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \neq j} \sqrt{n_{ij}} x_i x_j$$

is positive definite where  $(n_{ij})$  is the adjacency matrix of  $\Delta$ , i.e.,  $n_{ij}$  equal the number of edges from vertex  $i$  to vertex  $j$ .

Morphism in **Dynkin** from diagram  $\Delta_1$  to diagram  $\Delta_2$  consists of maps  $\rho : V_{\Delta_1} \rightarrow V_{\Delta_2}$  such that  $Q_2(x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, \dots, x_{\rho(n)}) = Q_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  $S(\mathbf{Dynkin})$  denotes the set of of isomorphisms classes of connected Dynkin diagrams. Next theorem gives an explicit characterization of  $S(\mathbf{Dynkin})$ .

**Theorem 1.**  *$S(\mathbf{Dynkin})$  consists of the Dynkin diagrams included in the following list*

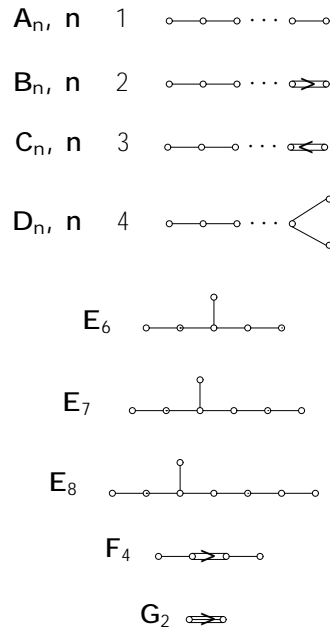


Figure 1: Simple Dynkin diagrams.

We enunciate the following fundamental

**Theorem 2.** 1.  $S(\mathbf{FinGroup}) \subset S(\mathbf{LieGroup}) \subset S(\mathbf{Group})$ .

2.  $S(\mathbf{LieGroup}) \cong S(\mathbf{LieAlg}) \cong S(\mathbf{Root}) \cong S(\mathbf{Dynkin}) \rightarrow \mathbf{WeylGroup}$ .

Part 1 of Theorem 2 is obvious. Although we shall not give a complete proof of part 2 the reader will find in the body of this paper many statements that shed light into its meaning. The map  $S(\mathbf{Dynkin}) \rightarrow \mathbf{WeylGroup}$  is surjective but fails to be injective. Diagrams  $B_n$  and  $C_n$  of the list above have both  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$  as its associated Weyl group.

## 2 Lie Algebras

We proceed to consider in details the category of Lie algebras. First we recall the notion of a Lie group.

**Definition 3.** A group  $(G, m)$  is said to be a complex Lie group if

1.  $G$  is a finite dimensional complex manifold.

2. the map  $m : G \times G \rightarrow G$  given by  $m(a, b) = ab$  for all  $a, b \in G$  is analytic smooth.
3. The map  $I : G \rightarrow G$  given by  $I(a) = a^{-1}$  for all  $a \in G$ , is analytic smooth.

**Definition 4.** A Lie algebra  $(\mathfrak{g}, [ , ])$  over a field  $k$  is a vector space  $\mathfrak{g}$  together with a binary operation  $[ , ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , called the Lie bracket, satisfying

1.  $[ , ]$  is a bilinear operation.
2. Antisymmetry:  $[x, y] = -[y, x]$  for each  $x, y \in \mathfrak{g}$ .
3. Jacobi identity:  $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$  for each  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

A  $k$ -algebra  $A$  may be regarded as a Lie algebra  $(A, [ , ])$ , with bracket  $[x, y] = xy - yx$  for all  $x, y \in A$ . In particular  $\text{End}(V)$  is a Lie algebra for any  $k$ -vector space  $V$ .

Let  $M$  be a smooth manifold and  $TM$  the tangent bundle of  $M$ . The space

$$\Gamma(M) = \{X : M \rightarrow TM, X(m) \in T_m M, m \in M\}$$

of vector fields on  $M$  is a Lie algebra with the Lie bracket

$$[X, Y] = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ for all } X, Y \in \Gamma(M).$$

Let  $G$  be a Lie group. The space  $T_e(G)$  tangent to the identity  $e \in G$  is a Lie algebra since  $T_e(G) \cong \Gamma(G)^G$  is a Lie subalgebra of  $\Gamma(G)$ . For the classical Lie groups one gets

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = T_I(SL_n(\mathbb{C})) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(A) = 0\}.$$

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = T_I(SO_n(\mathbb{C})) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle = 0 \text{ for } x, y \in \mathbb{C}^n\}.$$

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = T_I(Sp_{2n}(\mathbb{C})) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid w(Ax, y) + w(x, Ay) = 0 \text{ for } x, y \in \mathbb{C}^{2n}\}.$$

**Definition 5.** A morphism of Lie algebras  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  is a linear map  $\rho$  from  $\mathfrak{g}$  to  $\mathfrak{h}$  such that  $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$  for  $x, y \in \mathfrak{g}$ . A representation  $\rho$  of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  on a  $k$ -vector space  $V$  is a morphism  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  of Lie algebras.

The functor

$$\begin{array}{ccc} T_e : \mathbf{LieGroup} & \longrightarrow & \mathbf{LieAlg} \\ & G & \longmapsto T_e(G) \\ & \varphi : G \rightarrow H & \longmapsto d_e \varphi : T_e(G) \rightarrow T_e(H) \end{array}$$

induces an equivalence between  $S(\mathbf{LieGroup})$  and  $S(\mathbf{LieAlg})$ .

**Definition 6.** For any Lie algebra  $\mathfrak{g}$  the adjoint representation  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  is given by  $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$  for all  $x, y \in \mathfrak{g}$ .

**Definition 7.** 1. A subspace  $I$  of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is called a Lie subalgebra if  $[x, y] \in I$  for all  $x, y \in I$ .

2. A subalgebra  $I$  of  $\mathfrak{g}$  is said to be abelian if  $[x, y] = 0$  for all  $x, y \in I$ .

3. A subalgebra  $I$  of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is called an ideal if  $[x, y] \in I$  for all  $x \in I$  and  $y \in \mathfrak{g}$ .

For any  $k$ -algebra the space of derivations of  $A$

$$\text{Der}(A) = \{d : A \longrightarrow A \mid d(xy) = d(x)y + xd(y) \text{ for all } x, y \in A\}$$

is a Lie subalgebra of  $\text{End}(A)$ .

**Definition 8.** 1. A Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is called simple if it has no ideals other than  $\mathfrak{g}$  and  $\{0\}$ .

2. A Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is called semisimple if it has no abelian ideals other than  $\{0\}$ .

3. A maximal abelian subalgebra  $\mathfrak{h}$  of  $\mathfrak{g}$  is called a Cartan subalgebra.

Next theorem is due to Cartan. A proof of it may be found in [5].

**Theorem 9.** Let  $\mathfrak{g}$  be a finite dimensional simple Lie algebra over  $\mathbb{C}$ , then  $\mathfrak{g}$  is isomorphic to one of the list  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ ,  $E_6, E_7, E_8, F_4$  and  $G_2$ .

Lie Algebras  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$  and  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$  are called classical and will be explained using our graphical notation in Sections 5, 6, 7 and 8. Lie algebras  $E_6, E_7, E_8, F_4$  and  $G_2$  are called exceptional and the reader may find their definitions in [5].

**Definition 10.** The Killing form on  $\mathfrak{g}$  is the bilinear map  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$  given for all  $x, y \in \mathfrak{g}$  by  $\langle x, y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y))$ , where  $\circ$  denotes the product in  $\text{End}(\mathfrak{g})$  and  $\text{tr} : \text{End}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$  is the trace map.

Denote by  $\mathfrak{h}^*$  the linear dual of vector space  $\mathfrak{h}$ . The following proposition describes representations of abelian Lie algebras.

**Proposition 11.** Let  $\mathfrak{h}$  be an abelian Lie algebra and  $\rho : \mathfrak{h} \rightarrow \text{End}(V)$  a representation of  $\mathfrak{h}$ . Then  $V$  admits a decomposition

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} V_{\alpha} \tag{1}$$

where for each  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ ,  $V_{\alpha} = \{x \in V : \rho(h)(x) = \alpha(h)x, \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}$ , and  $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{h}_{\alpha} \neq 0\}$ .

Equation (1) is called Cartan decomposition of the representation  $\rho$  of  $\mathfrak{h}$ . Proposition 11 yields a map from  $S(\mathbf{LieAlg})$  into  $S(\mathbf{Root})$ , which turns out to be a bijection, as follows. Let  $\mathfrak{g}$  be a finite dimensional simple Lie algebra over  $\mathbb{C}$  and  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  a Cartan subalgebra. It is not difficult to see that  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$  for some natural real vector space  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ . The killing form  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  restricted to  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  is non-degenerated and makes the pair  $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  an Euclidean space. The linear dual  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  has an induced Euclidean structure, which we still denote by  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induced by the linear isomorphism  $f : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  given by  $f(x)(y) = \langle x, y \rangle$ , for all  $x, y \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

The adjoint representation  $\text{ad} : \mathfrak{h} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  restricted to  $\mathfrak{h}$  give us a Cartan decomposition  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$  where for each  $\alpha \in \mathfrak{h}$   $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x, \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}$  and  $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* : \mathfrak{h}_{\alpha} \neq 0\}$ .

**Definition 12.** *The triple  $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Phi)$  is the root system associated to Lie algebra  $\mathfrak{g}$ .*

**Definition 13.** *Given a root system  $\Phi$  the group  $W$  generated by all reflections  $S_{\alpha}$  with  $\alpha \in \Phi$ , where  $S_{\alpha}(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$ , is known as the Weyl group associated to  $\Phi$ .*

One can show that there exists a subset  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  of  $\Phi$  such that  $\Pi$  is a basis of  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  and each root  $\alpha \in \Phi$  can be written as a linear combination of roots in  $\Pi$  with coefficients in  $\mathbb{Z}$  which are either all non-negative or all non-positive. The set  $\Pi$  is called a set of fundamental roots. The integers

$$A_{ij} = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \tag{2}$$

are called the Cartan integers and the matrix  $A = (A_{ij})$  is called the Cartan matrix. Notice that  $A_{ii} = 2$ , and that for any  $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$  with  $i \neq j$ ,  $S_{\alpha_i}(\alpha_j)$  is a  $\mathbb{Z}$ -combination of  $\alpha_i$  and  $\alpha_j$ . Since the coefficient of  $\alpha_j$  is 1, the coefficient associated to  $\alpha_i$  in  $S_{\alpha_i}(\alpha_j)$  must be a non-positive integer, i.e.,  $A_{ij} \in \mathbb{Z}^{\leq 0}$ . The angle  $\theta_{ij}$  between  $\alpha_i, \alpha_j$  is given by the cosine formula

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle^{\frac{1}{2}} \cos(\theta_{ij}).$$

Then we have

$$4 \cos^2(\theta_{ij}) = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \cdot 2 \frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle},$$

and therefore  $4 \cos^2(\theta_{ij}) = A_{ij}A_{ji}$ . Let  $n_{ij} = A_{ij}A_{ji}$  clearly  $n_{ij} \in \mathbb{Z}$  and  $n_{ij} \geq 0$ . Since  $-1 \leq \cos(\theta_{ij}) \leq 1$  the only possible values for  $n_{ij}$  are  $n_{ij} = 0, 1, 2$  or  $3$ .

**Definition 14.** *The Dynkin diagram  $\Delta$  associated to a simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is the graph  $\Delta$  with vertices  $\{1, \dots, n\}$  in bijective correspondence with the set  $\Pi$  of fundamental roots of  $\mathfrak{g}$  such that*

1. Vertices  $i, j$  with  $i \neq j$  are joined by  $n_{ij} = A_{ij}A_i$  edges, where  $A_{ij}$  is given by formula (2).
2. Between each double edge or triple we attach the symbol  $<$ , or the symbol  $>$  pointing towards the shorter root with respect to Killing form.

**Theorem 15.** Consider the root system  $\Phi$  associated to a simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$ , let  $\alpha \in \Phi$  be a root. For each nonzero  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  there is  $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  and  $h_\alpha \in \mathfrak{h}$  such that  $\alpha(h_\alpha) = 2$ ,  $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ ,  $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$  and  $[h_\alpha, x_{-\alpha}] = -2x_{-\alpha}$ .

Theorem 15 implies that for any root  $\alpha \in \Phi$ ,  $x_\alpha, x_{-\alpha}$  and  $h_\alpha$  span a subalgebra  $\mathfrak{s}_\alpha$  isomorphic to  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . See Section 4 for more on  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . This fact explain the distinguished role played by  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  in the representation theory of simple Lie algebras.

**Definition 16.** Let  $\Phi \subset \mathfrak{h}$  be the root system associated with a simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$ .

1. For any  $\alpha \in \Phi$ , the Cartan element  $h_\alpha \in \mathfrak{h}$  given by Theorem 15 is called the coroot associated to root  $\alpha$ .  $\Phi_c = \{h_\alpha : \alpha \in \Phi\}$  is the coroot system associated to  $\mathfrak{h}$  and  $\Pi_c = \{h_\alpha : \alpha \in \Pi\}$  is the set of fundamental coroots.
2. The elements  $w_1, \dots, w_n$  in  $\mathfrak{h}^*$  given by the relations  $w_i(h_j) = \delta_{ij}$ , for all  $1 \leq i, j \leq n$ , where  $h_j$  is the coroot associated to fundamental root  $\alpha_j$ , are called the fundamental weights.

One can recover a simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  from its associated Dynkin diagram  $\Delta$  as follows: Let  $n_{ij}$  be the adjacency matrix of  $\Delta$ . The relation  $n_{ij} = a_{ij}a_{ji}$  determines univocally the Cartan matrix  $a_{ij}$ . Consider the free Lie algebra generated by the symbols  $h_1, \dots, h_n, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ . Form the quotient of this free Lie algebra by the relations

$$[h_i, h_j] = 0 \quad (\text{all } i, j); \quad [x_i, y_i] = h_i \quad (\text{all } i); \quad [x_i, x_j] = 0 \quad (i \neq j);$$

$$[h_i, x_j] = a_{ij}x_j \quad (\text{all } i, j); \quad [h_i, y_j] = -a_{ij}y_j \quad (\text{all } i, j);$$

and for all  $i \neq j$ ,

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [y_i, y_j] = 0, \quad \text{if } a_{ij} = 0.$$

$$[x_i, [x_i, x_j]] = 0, \quad [y_i, [y_i, y_j]] = 0 \quad \text{if } a_{ij} = -1.$$

$$[x_i, [x_i, [x_i, x_j]]] = 0, \quad [y_i, [y_i, [y_i, y_j]]] = 0 \quad \text{if } a_{ij} = -2.$$

$$[x_i, [x_i, [x_i, [x_i, x_j]]]] = 0, \quad [y_i, [y_i, [y_i, [y_i, y_j]]]] = 0 \quad \text{if } a_{ij} = -3.$$

Serre shows that the resulting Lie algebra is a finite-dimensional simple Lie algebra isomorphic to  $\mathfrak{g}$ . See [12] for more details.

### 2.1 Jacobian Criterion

Let  $k$  be a field of characteristic zero and let  $V$  be a finite dimensional  $k$ -vector space. Set  $V = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  and  $V^* = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  such that  $x_i(e_j) = \delta_{ij}$ . We have

$$x_k \left( \sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = a_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Any  $f \in V^*$  is written as  $f = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$ . Denote by  $S = S(V^*)$  the symmetric algebra of the dual space  $V^*$  which can be identify with the polynomial ring  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Let  $G$  be a finite group which acts on  $V$ .  $G$  also acts on  $V^*$ , and thus it acts on  $S = S(V^*)$  as follows

$$\begin{aligned} S(V^*) \times G &\longrightarrow S(V^*) \\ (p, g) &\longmapsto p(g) \end{aligned}$$

where  $(pg)(v) = p(gv)$ , for all  $g \in G$ ,  $p \in S(V^*)$ ,  $v \in V$ . The algebra

$$k[x_1, x_2, \dots, x_n]^G = \{p \in k[x_1, x_2, \dots, x_n] : p(g) = p, \forall g \in G\}$$

is called the  $G$ -invariant subalgebra of  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

**Definition 17.** Let  $k$  be a field and  $F$  a extension of  $k$ . Let  $S$  be a subset of  $F$ . The set  $S$  is algebraically dependent over  $k$  if for some positive integer  $n$  there is a non-zero polynomial  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  such that  $f(s_1, \dots, s_n) = 0$  for some different  $s_1, \dots, s_n \in S$ . Otherwise  $S$  is algebraically independent.

**Theorem 18.** Let  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]^W$  be the subalgebra of  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  consisting of  $W$ -invariant polynomials, then  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]^W$  is generated as an  $\mathbb{C}$ -algebra by  $n$  homogeneous, algebraically independent elements of positive degree together with 1.

The idea of proof of Theorem 18 goes as follows: let  $I$  be the ideal of  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  generated by all homogeneous  $W$ -invariant polynomials of positive degree. Using Hilbert's Basis Theorem we may choose a minimal generating set  $f_1, f_2, \dots, f_r$  for  $I$  consisting of homogeneous  $W$ -invariant polynomials of positive degree. One can show that  $r = n$  and furthermore  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]^W = \mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n]$ .

**Proposition 19.** Let  $f_1, \dots, f_n$  and  $g_1, \dots, g_n$  be two sets of homogeneous, algebraically independent generators of  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^W$  with degrees  $d_i$  and  $e_i$  respectively, then (after reordering)  $d_i = e_i$  for all  $i = 1, \dots, n$ .

The numbers  $d_1, \dots, d_n$  written in increasing order are called the *degrees* of  $W$ . Theorem 20 below is a simple criterion for the algebraic independence of polynomials  $f_1, \dots, f_n$  expressed in terms of the Jacobian determinant. We write  $J(f_1, \dots, f_n)$  for the determinant of the  $n \times n$  matrix whose  $(i, j)$ -entry is  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ .

**Theorem 20** (Jacobian criterion). *The set of polynomials  $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$  are algebraically independent over a field  $k$  of characteristic zero if and only if  $J(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ .*

### 3 Graph and matrices

We denote by  $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$  the vector space generated by bipartite directed graphs with a unique edge starting on the set  $[n]$  and ending on the set  $[n]$ . We describe  $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$  pictorially as follows

$$\mathbf{Digraph}^1(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \end{array}, \quad 1 \leq i, j \leq \mathbf{n} \right\rangle$$

where the symbol



denotes the graph whose unique edge starts at vertex at  $i$  and ends at vertex  $j$ . We define a product on  $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$  as follows

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \end{array}, \quad \text{if } \mathbf{j} = \mathbf{k} \\ 0, \quad \text{otherwise} \end{array}$$

The trace on  $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$  is defined as the linear functional  $\text{tr} : \mathbf{Digraph}^1(n, n) \rightarrow \mathbb{C}$  given by

$$\text{tr} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \end{array} = 1 \quad \text{and} \quad \text{tr} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \end{array} = 0$$

Algebra  $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$  is isomorphic to  $\text{End}(\mathbb{C}^n)$  through the application

$$\mathbf{Digraph}^1(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} - \mathbf{E}_{ij}$$

We will use this isomorphism to give combinatorial interpretation of results on  $\text{End}(\mathbb{C}^n)$  that are traditionally expressed in the language of matrices.

#### 4 Linear special algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

We begin studying the special linear algebra  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . It plays a distinguished role in the theory of Lie algebras. By definition we have

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \text{End}(\mathbb{C}^2) : \text{tr}(A) = 0\}.$$

As subspace of  $\mathbf{Digraph}^1(2, 2)$ ,  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  is the following vector space

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \langle \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_2, \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \\ \hline \end{array}_2, \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \\ \hline \end{array}_2 \rangle \mathbf{Digraph}^1(2, 2)$$

We fix as Cartan subalgebra of  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  the 1-dimensional subspace

$$\mathfrak{h} = \mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \mathbf{a}_2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 0$$

The dual space is  $\mathfrak{h}^* = \langle a_1, a_2 \rangle / \{a_1 + a_2 = 0\}$ , where

$$\mathbf{a}_i \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = ij$$

##### 4.1 Root system of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Consider the projection map  $\langle a_1, a_2 \rangle \rightarrow \langle a_1, a_2 \rangle / \{a_1 + a_2 = 0\}$ . We still denote by  $a_i$  the image of  $a_i$  under the projection above. Now each  $h \in \mathfrak{h}$  is of the form

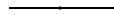
$$\mathfrak{h} = \mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \mathbf{a}_2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathfrak{h}$$

Let us compute the roots

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \mathbf{a}_2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array}] &= \mathbf{a}_1 [\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array}] + \mathbf{a}_2 [\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array}] = \\
 \mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \mathbf{a}_2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} &= \\
 \mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} - \mathbf{a}_2 \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} &= (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \mathbf{a}_2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array}] &= \mathbf{a}_1 [\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array}] + \mathbf{a}_2 [\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array}] = \\
 \mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \mathbf{a}_2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} &= \\
 -\mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} + \mathbf{a}_2 \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} &= -(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Therefore the root system of  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  is  $\Phi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_1\}$ . Setting  $\alpha = a_1 - a_2$  we have that the roots are  $\alpha$  and  $-\alpha$  and the set of fundamental roots is  $\Pi = \{\alpha\}$ . In pictures



### 4.2 Coroot system of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Let  $x_\alpha$  and  $x_{-\alpha}$  be the covectors associated with the roots  $\alpha$  and  $-\alpha$  of  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  respectively.

$$= \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{x} = \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{x}_- = \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array}$$

A vector  $h_\alpha \in \mathfrak{h}$  is said to be the coroot associated to the root  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , if  $h_\alpha = c[x_\alpha, x_{-\alpha}]$ ,  $c \in \mathbb{C}$  and  $\alpha(h_\alpha) = 2$ .

$$\mathbf{h} = [\mathbf{x}, \mathbf{x}_-] = \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

since

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \quad \boxed{\phantom{x}}_1 - \boxed{\phantom{x}}_2 = 2$$

**4.3 Killing form of  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$**

Let  $x$  and  $y$  in  $\mathfrak{h}$ . Set

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\ &= 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\ &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 \\ &= 2(x_1y_1 + x_2y_2) - 2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= 4\text{tr}(xy). \end{aligned}$$

**4.4 Dynkin diagram of  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$**

We have only one fundamental root, so the Dynkin diagram is just  $\circ$ .

**5 Special linear algebra  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$**

Let us recall the special linear algebra  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \text{End}(\mathbb{C}^n) : \text{tr}(A) = 0\}$$

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  consider as a subspace of  $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$  is following subspace

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \left\langle \boxed{\phantom{x}}_i - \boxed{\phantom{x}}_{i+1}, \boxed{\phantom{x}}_i^j, \boxed{\phantom{x}}_j^i ; 1 \leq i < j \leq n-1 \right\rangle$$

**5.1 Root system of  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$**

We take as Cartan subalgebra the subspace of  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{h} = \mathbf{a}_1 \boxed{\phantom{x}}_1 + \dots + \mathbf{a}_k \boxed{\phantom{x}}_k + \dots + \mathbf{a}_n \boxed{\phantom{x}}_n, \quad \mathbf{a}_k = 0$$

The dual space is  $\mathfrak{h}^* = \langle a_1, \dots, a_n \rangle / (\sum a_i = 0)$ , where

$$\mathbf{a}_i \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = ij$$

Consider the projection  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \longrightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle / (\sum a_k = 0)$ . The image of  $a_i$  under the projection above is still denote by  $a_i$ . Then vector  $h \in \mathfrak{h}$  can be written as

$$\mathbf{h} = \mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + \dots + \mathbf{a}_i \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + \dots + \mathbf{a}_n \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}$$

Let us compute the root system

$$\left[ \mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + \dots + \mathbf{a}_i \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + \dots + \mathbf{a}_n \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right] =$$

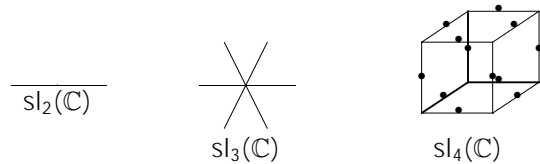
$$\mathbf{a}_i \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} - \mathbf{a}_j \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}$$

Also

$$\left[ \mathbf{a}_1 \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + \dots + \mathbf{a}_i \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + \dots + \mathbf{a}_n \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right] =$$

$$\mathbf{a}_j \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} - \mathbf{a}_i \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}$$

Thus the root system of  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  is  $\Phi = \{a_i - a_j, a_j - a_i, 1 \leq i < j \leq n-1\} \subset \mathfrak{h}^*$ . The set of fundamental roots is  $\Pi = \{a_i - a_{i+1}, i = 1, \dots, n-1\}$ . In pictures for  $n = 2, 3$  and  $4$  the root systems look like



Consider the linear map  $T : \mathbf{Digraph}^1(n, n) \longrightarrow \mathbf{Digraph}^1(n, n)$  sending each directed graph into its opposite graph. Clearly  $T$  is an antimorphism, i.e.,  $T(ab) = T(b)T(a)$ , for all  $a, b \in \mathbf{Digraph}^1(n, n)$ . For example,

$$T : \begin{array}{c} | \\ \diagup \\ \hline | \end{array} - \begin{array}{c} | \\ \diagdown \\ \hline | \end{array}$$

Notice that negative roots can be obtain from the positive ones through an application of  $T$ .

**5.2 Coroots and weights for  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$**

1. Coroot associated to the root  $a_i - a_j$

$$\left[ \begin{array}{c} | \\ \diagup \\ \hline | \end{array} , \begin{array}{c} | \\ \diagdown \\ \hline | \end{array} \right] = \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array}$$

2. Coroot associated to the root  $a_j - a_i$

$$\left[ \begin{array}{c} | \\ \diagdown \\ \hline | \end{array} , \begin{array}{c} | \\ \diagup \\ \hline | \end{array} \right] = \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array}$$

The set of fundamental coroots has the form  $\Pi_c = \{h_i - h_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1\}$  where

$$h_i - h_{i+1} = \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array}$$

The set of fundamental weights is  $w_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$  since

$$(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_i) \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} = 1$$

$$(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_i) \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} = 1 - 1 = 0$$

$$(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_i) \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ | \end{array} = 0$$

**5.3 The Killing form of  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$**

Let  $x$  and  $y$  in  $\mathfrak{h}$ . Set

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\ &= \sum_{i < j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) + \sum_{i < j} (x_j - x_i)(y_j - y_i) \\ &= 2 \sum_{i < j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\ &= 2 \left( \sum_{i < j} x_i y_i + \sum_{i < j} x_j y_j - \sum_{i < j} x_i y_j - \sum_{i < j} x_j y_i \right) \\ &= 2 \left( \sum (n - i)x_i y_i + \sum (i - 1)x_i y_i + \sum x_i y_i \right) \\ &= 2n \operatorname{tr}(xy). \end{aligned}$$

**5.4 Weyl group of  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$**

Consider the fundamental roots  $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  and  $S_{\alpha_i}$  the reflection associated to the fundamental root  $\alpha_i$ . Let  $h \in \mathfrak{h}$  and  $h_{\alpha_i}$  be the coroot associated to the fundamental root  $\alpha_i$ . By definition we have  $S_{\alpha_i}(h) = h - \alpha_i(h)h_{\alpha_i}$

$$\begin{aligned} S_i(\mathbf{h}) &= \mathbf{a}_1 \overline{\quad}_1 + \dots + \mathbf{a}_i \overline{\quad}_i + \mathbf{a}_{i+1} \overline{\quad}_{i+1} + \dots + \mathbf{a}_n \overline{\quad}_n - (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1}) \overline{\quad}_i - \overline{\quad}_{i+1} \\ &= \mathbf{a}_1 \overline{\quad}_1 + \dots + \mathbf{a}_{i+1} \overline{\quad}_i + \mathbf{a}_i \overline{\quad}_{i+1} + \dots + \mathbf{a}_n \overline{\quad}_n \end{aligned}$$

so we see that reflections  $S_{\alpha_i}$  has the form

$$\begin{aligned} S_i \overline{\quad}_k &= \overline{\quad}_k, \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{i} + 1 \\ S_i \overline{\quad}_i &= \overline{\quad}_{i+1} \\ S_i \overline{\quad}_{i+1} &= \overline{\quad}_i \end{aligned}$$

Therefore the Weyl group  $A_n$  associated with  $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$  is the symmetric group on  $n$  letters

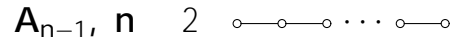
$$A_n = \langle S_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, n - 1 \rangle = S_n.$$

**5.5 Dynkin diagram of  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  and Cartan matrix.**

Using equation (2) one can check that the Cartan matrix associated to the Lie algebra  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  is

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

The Dynkin diagram associated to  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  is



**5.6 Invariant polynomials for  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$**

Consider the action of  $S_{n+1}$  on  $\mathbb{R}^{n+1}$  given by

$$\begin{aligned} S_{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (\pi, x) &\longmapsto (\pi x)_i = x_{\pi^{-1}(i)} \end{aligned}$$

notice that the permutation  $(ij)$  acts as a reflection on  $\mathbb{R}^{n+1}$  since

$$(ij)(x_i - x_j) = x_j - x_i = -(x_i - x_j)$$

$$(ij)(x) = x, \text{ si } x \in (x_i - x_j)^\perp \text{ (es decir } x_i = x_j)$$

Since  $S_{n+1}$  is generated by transpositions  $(i \ i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , then  $S_{n+1}$  is an example of what is called a reflection group. Recall that a linear action of a group  $G$  on a vector space  $V$  is said to be effective if the only fixed point is 0. The action of  $S_{n+1}$  on  $\mathbb{R}^{n+1}$  fixes points in  $\mathbb{R}^{n+1}$  lying on the straight line  $\{(x, x, \dots, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Thus the action of  $A_n$  on  $\mathbb{R}^{n+1}$  fails to be effective. If we instead let  $A_n$  act on the hyperplane  $V = \{(x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\}$  then the action becomes effective. Consider the power symmetric functions

$$f_i = x_1^{i+1} + \dots + x_{n+1}^{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Each  $f_i$  is  $S_{n+1}$ -invariant, and together the power symmetric functions form a set of basic invariants. This fact can be proven as follows: first notice that

$$\text{gr}(f_1)\text{gr}(f_2) \cdots \text{gr}(f_n) = 2 \cdot 3 \cdots n(n+1) = (n+1)! = |S_{n+1}| = |A_n|.$$





**6.2 Coroots and weights of  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$**

1. Coroot asociated to the root  $a_i - a_j$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+j \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n+i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+j \end{array} , \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n+j \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i \end{array} \right] =$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+j \end{array} = \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_j$$

$h_i - h_j$  is the coroot associated to the root  $a_i - a_j$ , since  $(a_i - a_j)(h_i - h_j) = 2$ .

2. Coroot asociated to the root  $a_i + a_j$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n+j \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ j \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n+i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ j \end{array} , \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+j \end{array} \right] =$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+j \end{array} = \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j$$

$h_i + h_j$  is the coroot associated to the la root  $a_i + a_j$ , since  $(a_i + a_j)(h_i + h_j) = 2$ .

3. Coroot asociated to the root  $2a_i$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n+i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ i \end{array} , \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i \end{array} \right] = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ i \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i \end{array} = \mathbf{h}_i$$

We conclude that  $\Phi_c = \{h_i - h_j, h_j - h_i, h_i + h_j, -h_i - h_j, h_i, -h_i, 1 \leq i < j \leq n\}$  is the coroot system of  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ . The set of fundamental coroots is given by  $\Pi_c = \{h_i - h_{i+1}, h_n; 1 \leq i \leq n - 1\}$  where

$$\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{i+1} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i+1 \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ n+i+1 \end{array}$$

and

$$\mathbf{h}_n = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ 2n \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ 2n \end{array}$$

The fundamental weights are  $w_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$  since

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_i) & \quad \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{n+1} \quad - \quad \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{i+1} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{n+i+1} \quad = 1 \\
 (\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_i) & \quad \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{i-k} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{n+i-k} \quad - \quad \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{i+1-k} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{n+i+1-k} \quad = 1 - 1 = 0 \\
 (\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_i) & \quad \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{i+k} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{n+i+k} \quad - \quad \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{i+1+k} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{n+i+1+k} \quad = 0
 \end{aligned}$$

### 6.3 Killing form of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

Let  $x$  and  $y$  in  $\mathfrak{h}$ . Set

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\
 &= \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) + \sum_{i \neq j} (x_i + x_j)(y_i + y_j) + 2 \sum_i (2x_i)(2y_i) \\
 &= 4(n+1) \sum x_i y_i \\
 &= 4(n+1) \text{tr}(xy).
 \end{aligned}$$

### 6.4 Weyl group of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

Consider the fundamental roots of the form  $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$ . Similarly to the  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ , it is easy to check that they generate a copy of  $S_n$ . Let us compute the reflection associated to the root  $\alpha_n = 2a_n$ . Given  $h \in \mathfrak{h}$ , we have that  $S_{\alpha_n}(h) = h - \alpha_n(h)h_{\alpha_n}$ , where  $h_{\alpha_n}$  is the coroot associated to the root  $\alpha_n$

$$\begin{aligned}
 S_n(\mathbf{h}) &= \mathbf{a}_i \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{n+1} - 2\mathbf{a}_n \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{2n} = \\
 \mathbf{a}_1 \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{n+1} + \cdots - \mathbf{a}_n \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}} - \overline{\overline{\overline{1}} \overline{\overline{1}}}_{2n} .
 \end{aligned}$$

This reflections are the sign changes and they generate a copy of the group  $\mathbb{Z}_2^n$ . Altogether the Weyl group associated to  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$  is

$$C_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n.$$

### 6.5 Cartan matrix and Dynkin diagram of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

$$C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

There are  $n$  vertices in this case, one for each fundamental root. The Killing form is  $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = 1$ , if  $i = 1, \dots, n-1$  and  $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle = 2$ . Moreover  $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} \rangle < \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle$ , and thus the Dynkin diagram of  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$  has the form

$$\mathbf{C}_n, \mathbf{n} \quad 3 \quad \circ - \circ - \circ \dots \circ \leftarrow \circ$$

### 6.6 Invariant functions under the action of $C_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$

Let us recall that the group structure on  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$  is given by

$$(a, \pi)(b, \sigma) = (a \cdot \pi(b), \pi \circ \sigma)$$

where  $(\pi b)_i = b_{\pi^{-1}(i)}$ .

**Proposition 21.**  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$  acts on  $\mathbb{R}^n$  as follows

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ ((a, \pi)x) & \longmapsto & ((a, \pi)x)_i = a_i x_{\pi^{-1}(i)} \end{array}$$

Consider the polynomials

$$f_i = x_1^{2^i} + x_2^{2^i} + \dots + x_n^{2^i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Each polynomial  $f_i$  is invariant under the action of  $(\mathbb{Z}_2)^n \rtimes S_n$  given by

$$(f(a, \pi))(x) = f((a, \pi)x).$$

The set of invariants

$$\begin{array}{lcl} f_1 & = & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ f_2 & = & x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 \\ & \vdots & \\ f_n & = & x_1^{2^n} + x_2^{2^n} + \dots + x_n^{2^n} \end{array}$$

is a basic set. This follows from the Jacobian criterion since

$$\text{gr}(f_1)\text{gr}(f_2)\cdots\text{gr}(f_n) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n! = |\mathbb{Z}_2^n \times S_n|$$

and

$$J = 2^n n! x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \neq 0.$$

### 7 Orthogonal Lie Algebra $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

Recall that the  $2n$ -orthogonal Lie Algebra is defined as follows

$$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) = \{X : X^t S + SX = 0\}$$

where  $S \in M_{2n}(\mathbb{C})$  is the matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Explicitly

$$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}; A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \text{ y } B = -B^t, C = -C^t \right\}.$$

$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$  as a subspace of  $\mathbf{Digraph}^1(2n, 2n)$  is given by

$$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\langle \overline{\overline{1} \overline{1}} - \overline{\overline{1} \overline{n+1}}, \overline{\overline{j} \overline{1}} - \overline{\overline{1} \overline{n+j}}, \overline{\overline{i} \overline{j}} - \overline{\overline{1} \overline{n+i}}, \overline{\overline{1} \overline{n+j}} - \overline{\overline{j} \overline{1}}, \overline{\overline{i} \overline{n+1}} - \overline{\overline{1} \overline{n+j}} \right\rangle.$$

where  $1 \leq i < j \leq n$ . We fix  $\mathfrak{h}$  the Cartan subalgebra of  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$  to be

$$\mathfrak{h} = \left\langle \mathbf{h}_k = \overline{\overline{1} \overline{k}} - \overline{\overline{1} \overline{n+k}}, k = 1, \dots, n \right\rangle$$

#### 7.1 Root System of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{h} = \mathbf{a}_k \overline{\overline{1} \overline{k}} - \overline{\overline{1} \overline{n+k}}$$



We concluded that  $\Phi_c = \{h_i - h_j, h_j - h_i, h_i + h_j, -h_i - h_j, 1 \leq i < j \leq n\}$  is the coroot system of  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ . The set of fundamental coroots is given by  $\Pi_c = \{h_i - h_{i+1}, h_{n-1} + h_n; 1 \leq i \leq n-1\}$  where

$$\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{i+1} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array}$$

and

$$\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{h}_n = \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array}$$

The fundamental weights are given by  $w_i = a_1 + \dots + a_i, i = 1, \dots, n-1$  and  $w_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2}$ . In a similar as for  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$  one can prove that  $w_i(h_j - h_{j+1}) = \delta_{ij}$ . For  $w_n$  we get

$$\begin{aligned} \frac{(a_1+\dots+a_n)}{2} \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} &= 1 \\ \frac{(a_1+\dots+a_n)}{2} \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \hline \\ \hline \end{array} &= 0 \end{aligned}$$

### 7.3 Killing form of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

Let  $x$  and  $y$  in  $\mathfrak{h}$ . Set

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\ &= \sum_{i \leq j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) + \sum_{i \leq j} (x_i + x_j)(y_i + y_j) + \sum_{j \leq i} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\ &\quad + \sum_{j \leq i} (x_i + x_j)(y_i + y_j) \\ &= \sum_{i \neq j} 2x_i y_j + 2x_i y_i \\ &= 4(n-1) \sum x_i y_i \\ &= 4(n-1) \text{tr}(xy). \end{aligned}$$

**7.4 Weyl group of  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$**

Consider the fundamental roots  $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$ . Just as for  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ , the associated reflections associated to these roots generate the group  $S_n$ . We compute the reflections associated to the roots  $\alpha_n = a_{n+1} + a_n$ . Given  $h \in \mathfrak{h}$ , we have  $S_{\alpha_n}(h) = h - \alpha_n(h)h_{\alpha_n}$  where  $h_{\alpha_n}$  is the coroot associated to the root  $\alpha_n$

$$S_n(\mathbf{h}) = \mathbf{a}_1 \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right) - (\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n) \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right) + \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} =$$

$$\mathbf{a}_1 \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right) + \dots - \mathbf{a}_n \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right) - \mathbf{a}_{n-1} \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right)$$

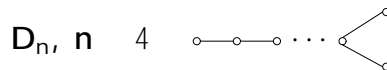
This reflection correspond to a change of sign. Thus we have that the Weyl group associated with  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$  is

$$D_n = \mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n$$

**7.5 Cartan matrix and Dynkin diagram of  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ .**

$$D_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

The Dynkin diagram has  $n$  vertices corresponding with the fundamental roots. The Killing has the form  $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = 1$ , if  $i = 1, \dots, n - 2$ ,  $\langle \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} \rangle = 1$ ,  $\langle \alpha_{n-2}, \alpha_n \rangle = 1$  and  $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle = 0$ . Thus the Dynkin diagram  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$



**7.6 Invariant functions under the action of  $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n$**

Consider the polynomials

$$f_i = \sum_{j=1}^n x_j^{2i}, \quad 1 \leq i \leq n - 1$$

$$f_n = x_1 \cdots x_n$$

clearly each  $f_i$  is invariant under the action of  $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n$ . It is easy to check that

$$\text{gr}(f_1)\text{gr}(f_2)\dots\text{gr}(f_n) = 2^{n-1}n! = |\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n|$$

and

$$J = (-2)^{n-1}(n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \neq 0,$$

so the Jacobian criterion tell us that  $f_1, \dots, f_n$  is a basic set of invariants.

### 8 Orthogonal algebra $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$

The orthogonal odd algebra

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{X : X^t S + SX = 0\}$$

where  $S \in M_{2n+1}(\mathbb{C})$  is of the form

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

An explicit form

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B & -H^t \\ C & -A^t & -G^t \\ G & H & 0 \end{pmatrix}; \begin{matrix} A, B, C \in M_n(\mathbb{C}), \\ B = -B^t, \\ C = -C^t \end{matrix} \right\}.$$

$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$  as a subspace of  $\mathbf{Digraph}^1(2n+1, 2n+1)$  is given by

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \left\langle \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ i & n+i & & \end{matrix}, \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ i & n+j & & \end{matrix}, \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & j & n+i \end{matrix}, \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & i & n+j \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ j & n+i & & \end{matrix}, \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & i & 2n+1 \end{matrix}, \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & 2n+1 & n+i \end{matrix}, \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & 2n+1 & i \end{matrix}, \dots, 1 \quad i < j \leq n \right\rangle$$

Let us fix  $\mathfrak{h}$  a Cartan subalgebra of  $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{h} = \left\langle \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ k & n+k & & \end{matrix}, \mathbf{k} = 1, \dots, \mathbf{n} \right\rangle$$

**8.1 Root system of  $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$**

Let  $h \in \mathfrak{h}$ ,

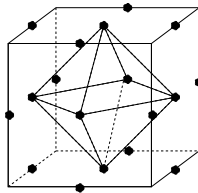
$$h = a_k \left( \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_k - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{n+k} \right)$$

where  $\{a_i\}$  is a base of  $\mathfrak{h}^*$  dual to the natural base of  $\mathfrak{h}$ . We compute the positive roots. The negative roots are obtain applying the following antimorphism to the positive roots.  $T : \mathbf{Digraph}^1(2n+1, 2n+1) \longrightarrow \mathbf{Digraph}^1(2n+1, 2n+1)$ . For example

$$T : \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_i^{n+i} - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{n+j}^i$$

$$\begin{aligned} & \left[ a_k \left( \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_k - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{n+k} \right), \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_i^j - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{n+j}^{n+i} \right] = \\ & \quad (a_i - a_j) \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_i^j - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{n+j}^{n+i} \\ & \left[ a_k \left( \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_k - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{n+k} \right), \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_i^{n+j} - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_j^{n+i} \right] = \\ & \quad (a_i + a_j) \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_i^{n+j} - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_j^{n+i} \\ & \left[ a_k \left( \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_k - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{n+k} \right), \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_i^{2n+1} - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{2n+1}^{n+i} \right] = a_i \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_i^{2n+1} - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \Big|_{2n+1}^{n+i} \end{aligned}$$

Thus the set of roots is  $\Phi = \{a_i - a_j, a_j - a_i, a_i + a_j, a_i, -a_i\}$ . The fundamental roots are  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  where  $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  and  $\alpha_n = a_n$ . In pictures the root system of  $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$  looks like



**8.2 Coroots and weights of  $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$**

1. Coroots associated to the root  $a_i - a_j$

$$\left[ \begin{array}{c} j \\ \hline \diagup \\ i \end{array} - \begin{array}{c} n+i \\ \hline \diagdown \\ n+j \end{array}, \begin{array}{c} i \\ \hline \diagdown \\ j \end{array} - \begin{array}{c} n+j \\ \hline \diagup \\ n+i \end{array} \right] =$$

$$\begin{array}{c} \hline \hline \\ i \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ j \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ n+j \end{array} = \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_j$$

Since  $(a_i - a_j)(h_i - h_j) = 2$ , we see that  $h_i - h_j$  is the coroot associated to the root  $a_i - a_j$ .

2. Coroot associated to the root  $a_i + a_j$

$$\left[ \begin{array}{c} n+j \\ \hline \diagup \\ i \end{array} - \begin{array}{c} n+i \\ \hline \diagdown \\ j \end{array}, \begin{array}{c} j \\ \hline \diagdown \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} i \\ \hline \diagup \\ n+j \end{array} \right] =$$

$$- \begin{array}{c} \hline \hline \\ i \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ j \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ n+j \end{array} = -\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_j$$

Here  $(a_i + a_j)(-h_i - h_j) = -2$ , and thus  $h_i + h_j$  is the coroot associated to the root  $a_i + a_j$ .

3. Coroot associated to the root  $a_i$

$$\left[ \begin{array}{c} 2n+1 \\ \hline \diagup \\ i \end{array} - \begin{array}{c} n+i \\ \hline \diagdown \\ 2n+1 \end{array}, \begin{array}{c} 2n+1 \\ \hline \diagdown \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} i \\ \hline \diagup \\ 2n+1 \end{array} \right] = - \begin{array}{c} \hline \hline \\ i \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ n+i \end{array} = -\mathbf{h}_i$$

Thus  $2h_i$  is the coroot associated to the root  $a_i$ .

We have that  $\Phi_c = \{h_i - h_j, h_j - h_i, h_i + h_j, -h_i - h_j, 2h_i, -2h_i, 1 \leq i < j \leq n\}$  is the coroot system of  $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ . The set of fundamental coroot has the form  $\Pi_c = \{h_i - h_{i-1}, 2h_n; 1 \leq i \leq n-1\}$  where

$$\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{i+1} = \begin{array}{c} \hline \hline \\ i \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ i+1 \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ n+i+1 \end{array}$$

and

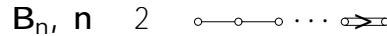
$$\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{h}_n = \begin{array}{c} \hline \hline \\ n-1 \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ 2n-1 \end{array} + \begin{array}{c} \hline \hline \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \hline \hline \\ 2n \end{array}$$



**8.5 Cartan matrix and Dynkin diagram of  $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ .**

$$B_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

The diagram has  $n$  vertices, one for each fundamental root. The killing form is given by  $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = 1$ , if  $i = 1, \dots, n - 1$  and  $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle = 2$ . Furthermore  $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} \rangle > \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle$ , and thus, the Dynkin diagram of  $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$  has form



**Acknowledgments**

Thanks to Manuel Maia for helping us with LaTeX, Delia Flores de Chela for helpful comments and suggestions and Pedro Alson who has been teaching the value of graphical thinking for many years.

**References**

- [1] Theodor Bröcker, Tammo Tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*. Springer-Verlag, New York 1985.
- [2] Roger Carter, Graeme Segal y Ian Macdonald. *Lecture on Lie groups and Lie algebras*. Students Texts 32, London Mathematical Society, 1995.
- [3] Rafael Díaz, Eddy Pariguan. *Super, quantum and noncommutative species*. math.CT/0509674. 2005.
- [4] Rafael Díaz, Eddy Pariguan. *Quantum symmetric functions*. Communications in Algebra. **33**. (2005), no.6, 1947-1978.
- [5] Williams Fulton, Joe Harris. *Representation Theory. A first course* . Springer-Verlag, New York 1991.
- [6] I.M. Gelfand. *Lectures on linear algebra*, Robert E. Krieger Publishing Company. Huntington, New York, 1978.
- [7] S. Gelfand and Y. Manin *Methods of homological algebra*. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Velarg, Berlin, 2003.

- [8] James E. Humphreys. *Introductions to Lie Algebras and Representation theory* . Springer-Verlag, New York 1972.
- [9] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29. Cambridge University Press, 1990.
- [10] Eduard Looijenga. *Root Systems and Elliptic Curves*, Mathematisch Instituut, Toernooiveld, Driehuizerweg 200, Nijmegen, The Netherlands. Springer-Verlag, 1976.
- [11] A.L. Onishchik and E.B. Vinberg. *Lie groups and Lie algebras II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [12] J-P. Serre. *Complex semisimple Lie algebras* . Springer-Verlag, New York 1977.
- [13] P. Slodowy. *Groups and Special Singularities*, Mathematisches Seminar, Universität Hamburg, D-20146 Hamburg, Germany.
- [14] P. Slodowy. *Platonic Solids, Kleinian Singularities, and Lie Groups*, Mathematisches Institut, Universität Bonn, Wegelerstraße 10, D-5300 Bonn, W. Germany.
- [15] A.N. Varchenko, S.V. Chmutov. *Finite irreducible groups, generated by reflections are monodromy groups of suitable Singularities and Lie Groups*.

RAFAEL DÍAZ & EDDY PARIGUAN  
INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS.  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.